มหาวิทยาลัยนครพนม

คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม

เอกสารประกอบการสอน

รหัสวิชา…30208302...ชื่อวิชา…พลศาสตร์วิศวกรรม (Engineering Dynamics)...

หลักสูตร…อุตสาหกรรมบัณฑิต…สาขาวิชา…เทคโนโลยีเครื่องกล….

ผู้เรียบเรียง รณศักดิ์ วิวัฒน์ปรีชานนท์ ,วิชุดา ตามัย ,สุจิน สุนีย์

ภาควิชาเทคโนโลยีเครื่องกล คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยนครพนม

2559

คำนำ

เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ ผู้เรียบเรียงมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นเอกสารประกอบการเรียนการสอนในวิชาพลศาสตร์วิศวกรรม(Engineering Dynamics) รหัสวิชา 30208302 ซึ่งเป็นวิชาชีพบังคับในหลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตร์บัณฑิต สาขาเทคโนโลยีเครื่องกล คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม มหาวิทยาลัยนครพนม ซึ่งวิชาพลศาสตร์วิศวกรรมนี้ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับหลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์ กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน การหาความเร็วและความเร่งของอนุภาคและวัตถุเกร็ง การหาแรงที่เกิดจากความเร่งของอนุภาคและวัตถุเกร็ง การหาโมเมนตัมและแรงกระแทกที่เกิดขึ้นในอนุภาคและวัตถุเกร็ง การใช้สมการพลังงานในการแก้ปัญหาการเคลื่อนที่

โดยภายในเอกสารเล่มนี้ประกอบไปด้วย ความมุ่งหมายหลักสูตร ลักษณะรายวิชา การแบ่งหน่วย/บทเรียน/หัวข้อ กำหนดการสอน วัตถุประสงค์ในการสอน ตารางกำหนดน้ำหนักคะแนน การประเมินผลรายวิชา และแผนการสอนตลอด 18 สัปดาห์

หวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารประกอบการสอนเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนการสอนในวิชาพลศาสตร์วิศวกรรม ในหลักสูตรครุศาสตร์อุตสาหกรรมบัณฑิตและในหลักสูตรอุตสาหกรรมศาสตร์บัณฑิต แต่ถ้าหากมีส่วนใดส่วนหนึ่งมีข้อผิดพลาดในด้านต่าง ๆ ผู้เรียบเรียงต้องขออภัยมา ณ ที่นี้และขอรับข้อเสนอแนะต่าง ๆ ของทุกท่านด้วยความยินดี เพื่อที่จะได้นำไปปรับปรุงแก้ไขและให้เกิดประโยชน์สูงสุดต่อไป

รณศักดิ์ วิวัฒน์ปรีชานนท์
วิชุดา ตามัย
สุจิน สุนีย์
คณะเทคโนโลยีอุตสาหกรรม
มหาวิทยาลัยนครพนม

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
ความมุ่งหมายของหลักสูตร	5
ลักษณะรายวิชา	6
การแบ่งหน่วย/บทเรียน/หัวข้อ	7
กำหนดการสอน	13
จุดประสงค์การสอน	20
การประเมินผลรายวิชา	26
ตารางกำหนดน้ำหนักคะแนน	27
ใบเตรียมการสอน	
สัปดาห์ที่ 1	29
สัปดาห์ที่ 2	40
สัปดาห์ที่ 3	66
สัปดาห์ที่ 4	85
สัปดาห์ที่ 5	105
สัปดาห์ที่ 6	125
สัปดาห์ที่ 7	140
สัปดาห์ที่ 8	158
สัปดาห์ที่ 9 (สอบกลางภาคเรียน)	170
สัปดาห์ที่ 10	171
สัปดาห์ที่ 11	188
สัปดาห์ที่ 12	204
สัปดาห์ที่ 13	220
สัปดาห์ที่ 14	234
สัปดาห์ที่ 15	251
สัปดาห์ที่ 16	276
สัปดาห์ที่ 17	290
สัปดาห์ที่ 18 (สอบปลายภาคเรียน)	309
บรรณานุกรม	310

หน้า

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก. เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

สัปดาห์ที่ 1 313
สัปดาห์ที่ 2 315
สัปดาห์ที่ 3 317
สัปดาห์ที่ 4 322
สัปดาห์ที่ 5 330
สัปดาห์ที่ 6 335
สัปดาห์ที่ 7 348
สัปดาห์ที่ 8 356
สัปดาห์ที่ 10 361
สัปดาห์ที่ 11 365
สัปดาห์ที่ 12 370
สัปดาห์ที่ 13 376
สัปดาห์ที่ 14 382
สัปดาห์ที่ 15 389
สัปดาห์ที่ 16 395
สัปดาห์ที่ 17 399

ภาคผนวก ข. ตารางแสดงค่าต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง 407
ภาคผนวก ค. คุณสมบัติของวัตถุที่มีรูปทรงต่าง ๆ 410

ความมุ่งหมายของหลักสูตร

หลักสูตรระดับ ปริญญาตรี สาขาวิชา เทคโนโลยีเครื่องกล

ภาควิชา เทคโนโลยีเครื่องกล

1. เพื่อผลิตครูอาชีวศึกษาที่มีความรู้และทักษะเฉพาะด้าน ในหน้าที่ครูทำการสอนวิชาช่างอุตสาหกรรม ช่างเทคนิคอุตสาหกรรมและช่างเทคนิควิศวกรรมในสาขาเครื่องกล
2. เพื่อผลิตครูอาชีวศึกษาที่มีความรู้ความสามารถในการสอน โดยเน้นการสอนวิชาชีพเฉพาะสาขาเครื่องกล มีทักษะในการสอนให้คำแนะนำ การให้ความรู้ประสบการณ์และการอบรมจริยธรรมแก่นักศึกษา คนงาน หรือช่างฝีมือ ตลอดจนการประสานงานติดตามและประเมินผลการปฏิบัติงาน
3. เพื่อฝึกฝนให้ครูอาชีวศึกษามีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ มีกิจนิสัยในการค้นคว้าวางแผนเตรียมการสอน

   รวมทั้งปรับปรุงและพัฒนาตนเองให้ก้าวหน้าอยู่เสมอ สามารถแก้ปัญหาด้วยหลักการและเหตุผล ปฏิบัติงานด้วยหลักวิชาการที่มีการวางแผนและควบคุมอย่างรอบคอบ ซึ่งจะก่อให้เกิดผลสัมฤทธิ์ตามเป้าหมายอย่างประหยัด รวดเร็ว มีคุณภาพ
4. เพื่อปลูกฝังให้ครูอาชีวศึกษามีคุณธรรม มีระเบียบวินัย ตรงต่อเวลา ซื่อสัตย์สุจริต ขยันหมั่นเพียร สำนึกในจรรยาบรรณครูและรับผิดชอบต่อหน้าที่และสังคม

ลักษณะรายวิชา

รหัสและชื่อวิชา พลศาสตร์วิศวกรม 3(3-0-3)
Engineering Dynamics

สภาพรายวิชา วิชาบังคับสาขาในหลักสูตรอุตสาหกรรมบัณฑิต
สาขาวิชาเอก เทคโนโลยีเครื่องกล

ระดับรายวิชา ภาคเรียนที่ 2 ชั้นปีที่ 1

พื้นฐาน -

เวลาศึกษา 54 คาบ ตลอด 18 สัปดาห์ เรียนทฤษฎี 3 คาบต่อสัปดาห์
และนักศึกษาต้องมีเวลาศึกษาค้นคว้านอกเวลา 3 ชั่วโมงต่อสัปดาห์

หน่วยกิต 3 หน่วยกิต

จุดมุ่งหมาย

1. เข้าใจหลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์
2. เข้าใจหลักการจลนศาสตร์ของอนุภาคและวัตถุเกร็ง
3. เข้าใจหลักการของจลนพลศาสตร์ของอนุภาคและวัตถุเกร็ง
4. เข้าใจในหลักการของจลนศาสตร์ของระบบอนุภาค
5. เห็นความสำคัญของการศึกษาวิชาพลศาสตร์วิศวกรรม

คำอธิบายรายวิชา

ศึกษาหลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์ กฎของนิวตัน การหาความเร็วและความเร่งของอนุภาคและวัตถุเกร็ง การหาแรงที่เกิดจากความเร่งของอนุภาคและวัตถุเกร็ง การหาโมเมนตัมและแรงกระแทกที่เกิดขึ้นในอนุภาคและวัตถุเกร็ง การใช้สมการพลังงานในการแก้ปัญหาการเคลื่อนที่

การแบ่งหน่วย / บทเรียน / หัวข้อ

หน่วยที่	รายการ	คาบเรียน	
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ
1	หลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์วิศวกรรม	3	-
	1.1 นิยามที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์วิศวกรรม	2	
	1.1.1 ความแตกต่างระหว่างสถิตศาสตร์กับพลศาสตร์		
	1.1.2 ความแตกต่างระหว่างคิเนเมติกส์กับคิเนติกส์		
	1.1.3 ความแตกต่างระหว่างระยะทางกับการขจัด		-
	1.1.4 ความแตกต่างระหว่างอัตราเร็วกับความเร็ว		
	1.1.5 ความแตกต่างระหว่างมวลกับน้ำหนัก		
	1.1.6 ความแตกต่างระหว่างความเร่งกับความหน่วง		
	1.2 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน	1	
	1.2.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน		
	1.2.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน		
	1.2.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน		-
	1.2.4 กฎความกฎความโน้มถ่วง		
2	จลนศาสตร์ของอนุภาค	12	
	2.1 การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค	3	
	2.1.1 การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค		
	2.1.2 การเคลื่อนที่ในแนวราบ		
	2.1.3 การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง		
	2.1.4 ความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณต่าง ๆ		
	2.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน	1	
	2.2.1 การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน		
	2.2.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน		

การแบ่งหน่วย / บทเรียน / หัวข้อ

หน่วยที่	รายการ	คาบเรียน	
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ
2	2.3 การการเคลื่อนที่เชิงมุม 2.3.1 ลักษณะของการเคลื่อนที่เชิงมุม 2.3.2 หลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบเชิงมุม	1	
	2.4 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ 2.4.1 ลักษณะของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ 2.4.2 หลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์	1	
	2.5 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ 2.5.1 ลักษณะของการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ 2.5.2 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ x - y 2.5.3 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ n - t 2.5.4 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ r - θ	3	
	2.6 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ 2.6.1 ลักษณะของเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ 2.6.2 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงขนานกับตำแหน่งเดิม 2.6.3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงหมุน	3	

การแบ่งหน่วย / บทเรียน / หัวข้อ

หน่วยที่	รายการ	คาบเรียน	
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ
3	จลนพลศาสตร์ของอนุภาค	12	
	3.1 แรงและการเคลื่อนที่	3	
	3.1.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่		
	3.1.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน x - y		
	3.1.3 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน n - t		
	3.1.4 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน r - θ		
	3.2 งานและพลังงาน	3	
	3.2.1 ความหมายของงานและพลังงาน		
	3.2.2 สมการของงานและพลังงาน		
	3.2.3 หลักความถาวรของพลังงาน		
	3.2.4 กำลังงาน		
	3.2.5 ประสิทธิภาพทางกล		
	3.3 อิมพัลส์และโมเมนตัม	3	
	3.3.1 ความหมายของอิมพัลส์และโมเมนตัม		
	3.3.2 สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น		
	3.3.3 อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น		
	3.3.4 อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงมุม		
	3.4 การกระทบ	3	
	3.4.1 ความหมายของการกระทบ		
	3.4.2 การกระทบแบบ Direct central Impact		
	3.4.3 สมการการกระทบแบบ Direct central Impact		
	3.4.4 การวิเคราะห์การกระทบแบบ Direct central Impact		
	3.4.5 การกระทบแบบ Oblique central Impact		
	3.4.6 สมการการกระทบแบบ Oblique central Impact		
	3.4.7 การวิเคราะห์การกระทบแบบ Oblique central Impact		

การแบ่งหน่วย / บทเรียน / หัวข้อ

หน่วยที่	รายการ	คาบเรียน	
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ
4	จลนศาสตร์ของระบบอนุภาค	6	-
	4.1 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค	1	
	4.1.1 สมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค		
	4.1.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค		
	4.2 งานและพลังงานของระบบอนุภาค	1	
	4.2.1 สมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาค		
	4.2.2 การวิเคราะห์งานและพลังงานของระบบอนุภาค		
	4.3 อิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค	1	
	4.3.1 สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค		
	4.3.2 การวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค		
	4.4 การไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น		
	4.4.1 ลักษณะการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น	1.5	
	4.4.2 การวิเคราะห์การไหลของมวลแบบทรงตัวมั่น		
	4.5 การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน		
	4.5.1 ลักษณะการไหลของระบบมวลแบบแปรผัน	1.5	
	4.5.2 การวิเคราะห์การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน		

การแบ่งหน่วย / บทเรียน / หัวข้อ

หน่วยที่	รายการ	คาบเรียน	
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ
			-
5	จลนศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ	6	
	5.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ	1	
	5.1.1 ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ		
	5.1.2 การจำแนกลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ		
	5.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่	1	
	5.2.1 ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่		
	5.2.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่		
	5.3 จุดหมุนชั่วขณะ	1	
	5.3.1 ความหมายของจุดหมุนชั่วขณะ		
	5.3.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้จุดหมุนชั่วขณะ		
	5.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง	3	
	5.4.1 ความแตกต่างระหว่างการเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์กับแบบสัมพัทธ์		
	5.4.2 การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์		
	5.4.3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบแกนอ้างอิงขนานกับแนวเดิม		
	5.4.4 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงหมุน		

การแบ่งหน่วย / บทเรียน / หัวข้อ

หน่วยที่	รายการ	คาบเรียน	
		ทฤษฎี	ปฏิบัติ
6	จลนพลศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ	9	
	6.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล	1	
	6.1.1 สมการของโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล		
	6.1.2 รัศมีไจเรชั่น		
	6.1.3 การวิเคราะห์ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล		
	6.2 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง	2	
	6.2.1 การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นตรง		
	6.2.2 การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง		
	6.2.3 การเคลื่อนที่แบบการหมุนรอบแกนคงที่		
	6.2.4 การเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ		
	6.2.5 การเคลื่อนที่แบบหมุน		
	6.3 งานและพลังงานของวัตถุเกร็ง	3	
	6.3.1 สมการงานและพลังงานของวัตถุเกร็ง		
	6.3.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน		
	6.4 อิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง	3	
	6.4.1 สมการอิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง		
	6.4.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัม		

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
1		1-3	1.1 นิยามที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์วิศวกรรม 1.1.1 ความแตกต่างระหว่างสถิตศาสตร์กับพลศาสตร์ 1.1.2 ความแตกต่างระหว่างคิเนเมติกส์กับคิเนติกส์ 1.1.3 ความแตกต่างระหว่างระยะทางกับการขจัด 1.1.4 ความแตกต่างระหว่างอัตราเร็วกับความเร็ว 1.1.5 ความแตกต่างระหว่างมวลกับน้ำหนัก 1.1.6 ความแตกต่างระหว่างความเร่งกับความหน่วง 1.2 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน 1.2.1 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน 1.2.2 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน 1.2.3 กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน 1.2.4 กฎความกฎความโน้มถ่วง	
2		1-3	2.1 การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค 2.1.1 การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค 2.1.2 การเคลื่อนที่ในแนวราบ 2.1.3 การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง 2.1.4 ความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณต่าง ๆ	
3		1	2.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน 2.2.1 การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน 2.2.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน	

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
		2	2.3 การการเคลื่อนที่เชิงมุม 2.3.1 ลักษณะของการเคลื่อนที่เชิงมุม 2.3.2 หลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบเชิงมุม	
		3	2.4 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ 2.4.1 ลักษณะของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ 2.4.2 หลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์	
4		1-3	2.5 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ 2.5.1 ลักษณะของการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ 2.5.2 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ x - y 2.5.3 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ n - t 2.5.4 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ r - θ	
5			2.6 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ 2.6.1 ลักษณะของเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ 2.6.2 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงขนานกับตำแหน่งเดิม 2.6.3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงหมุน	

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
6		1-3	3.1 แรงและการเคลื่อนที่ 3.1.1 ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่ 3.1.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน x - y 3.1.3 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน n - t 3.1.4 การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน r - θ	
7		1-3	3.2 งานและพลังงาน 3.2.1 ความหมายของงานและพลังงาน 3.2.2 สมการของงานและพลังงาน 3.2.3 หลักความถาวรของพลังงาน 3.2.4 กำลังงาน 3.2.5 ประสิทธิภาพทางกล	
8		1-3	3.3 อิมพัลส์และโมเมนตัม 3.3.1 ความหมายของอิมพัลส์และโมเมนตัม 3.3.2 สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น 3.3.3 อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น 3.3.4 อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงมุม	
9			สอบกลางภาคเรียน	

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
10		1-3	3.4 การกระทบ 3.4.1 ความหมายของการกระทบ 3.4.2 การกระทบแบบ Direct central Impact 3.4.3 สมการการกระทบแบบ Direct central Impact 3.4.4 การวิเคราะห์การกระทบแบบ Direct central Impact 3.4.5 การกระทบแบบ Oblique central Impact 3.4.6 สมการการกระทบแบบ Oblique central Impact 3.4.7 การวิเคราะห์การกระทบแบบ Oblique central Impact	
11		1	4.1 การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค 4.1.1 สมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค 4.1.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค	
		2	4.2 งานและพลังงานของระบบอนุภาค 4.2.1 สมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาค 4.2.2 การวิเคราะห์งานและพลังงานของระบบอนุภาค	
		3	4.3 อิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค 4.3.1 สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค 4.3.2 การวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค	

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
12		1-3	4.4 การไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น 4.4.1 ลักษณะการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น 4.4.2 การวิเคราะห์การไหลของมวลแบบทรงตัวมั่น 4.5 การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน 4.5.1 ลักษณะการไหลของระบบมวลแบบแปรผัน 4.5.2 การวิเคราะห์การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน	
13		1	5.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ 5.1.1 ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ 5.1.2 การจำแนกลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ	
		2	5.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่ 5.2.1 ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่ 5.2.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่	
		3	5.3 จุดหมุนชั่วขณะ 5.3.1 ความหมายของจุดหมุนชั่วขณะ 5.3.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้จุดหมุนชั่วขณะ	

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
14		1-3	5.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง 5.4.1 ความแตกต่างระหว่างการเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์กับแบบสัมพัทธ์ 5.4.2 การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์ 5.4.3 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงขนานกับแนวเดิม 5.4.4 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงหมุน	
15		1	6.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล 6.1.1 สมการของโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล 6.1.2 รัศมีไจเรชั่น 6.1.3 การวิเคราะห์ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล	
		2-3	6.2 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง 6.2.1 การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นตรง 6.2.2 การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง 6.2.3 การเคลื่อนที่แบบการหมุนรอบแกนคงที่ 6.2.4 การเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ 6.2.5 การเคลื่อนที่แบบหมุน	
16		1-3	6.3 งานและพลังงานของวัตถุเกร็ง 6.3.1 สมการงานและพลังงานของวัตถุเกร็ง 6.3.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน	

กำหนดการสอน

สัปดาห์ที่	วัน / เดือน	คาบที่	รายการ	หมายเหตุ
17		1-3	6.4 อิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง 6.4.1 สมการอิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง 6.4.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัม	
18			สอบปลายภาคเรียน	

จุดประสงค์การสอน

หน่วยที่	รายการจุดประสงค์การสอน	คาบเรียน	
		ท	ป
1	**หลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์วิศวกรรม**	**3**	-
	1.1 เข้าใจนิยามที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์วิศวกรรมได้ถูกต้อง	2	
	1.1.1 อธิบายความแตกต่างระหว่างสถิตศาสตร์กับพลศาสตร์		
	1.1.2 อธิบายความแตกต่างระหว่างคิเนเมติกส์กับคิเนติกส์		
	1.1.3 อธิบายความแตกต่างระหว่างระยะทางกับการขจัด		
	1.1.4 อธิบายความแตกต่างระหว่างอัตราเร็วกับความเร็ว		
	1.1.5 อธิบายความแตกต่างระหว่างมวลกับน้ำหนัก		
	1.1.6 อธิบายความแตกต่างระหว่างความเร่งกับความหน่วง		
	1.2 เข้าใจกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันได้ถูกต้อง	1	-
	1.2.1 อธิบายกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน		
	1.2.2 อธิบายกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน		
	1.2.3 อธิบายกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน		
	1.2.4 อธิบายกฎความกฎความโน้มถ่วง		
2	**จลนศาสตร์ของอนุภาค**	**12**	-
	2.1 เข้าใจลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาคได้ถูกต้อง	3	-
	2.1.1 อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค		
	2.1.2 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ในแนวราบ		
	2.1.3 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง		
	2.1.4 อธิบายความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณต่าง ๆ		
	2.1.5 คำนวณการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค		
	2.2 เข้าใจหลักการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกันได้ถูกต้อง	1	-
	2.2.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน		
	2.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน		
	2.2.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน		

จุดประสงค์การสอน

หน่วยที่	รายการจุดประสงค์การสอน	คาบเรียน	
		ท	ป
	2.3 เข้าใจสมการการเคลื่อนที่เชิงมุมได้ถูกต้อง	1	-
	2.3.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่เชิงมุม		
	2.3.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบเชิงมุม		
	2.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่เชิงมุมของอนุภาค		
	2.4 เข้าใจหลักการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ได้ถูกต้อง	1	-
	2.4.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์		
	2.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์		
	2.4.3 คำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์		
	2.5 เข้าใจการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบได้ถูกต้อง	3	-
	2.5.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ		
	2.5.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ x - y		
	2.5.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ n - t		
	2.5.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ r - θ		
	2.5.5 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ		
	2.6 เข้าใจหลักการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบได้ถูกต้อง	3	-
	2.6.1 อธิบายลักษณะของเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ		
	2.6.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงขนานกับตำแหน่งเดิม (Translating Reference Axes)		
	2.6.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงหมุน (Rotating Reference Axes)		
	2.6.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบสัมพัทธ์ในระนาบ		
3	**จลนพลศาสตร์ของอนุภาค**	**12**	-
	3.1 เข้าใจหลักการของแรงและการเคลื่อนที่ได้ถูกต้อง	3	-
	3.1.1 อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่		
	3.1.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน x - y		
	3.1.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน n - t		
	3.1.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน r - θ		
	3.1.5 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของแรงและการเคลื่อนที่		

จุดประสงค์การสอน

หน่วยที่	รายการจุดประสงค์การสอน	คาบเรียน	
		ท	ป
	3.2 เข้าใจหลักการของงานและพลังงานได้ถูกต้อง	3	-
	3.2.1 อธิบายความหมายของงานและพลังงาน		
	3.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนของอนุภาคที่โดยใช้สมการงานและพลังงาน		
	3.2.3 อธิบายหลักความถาวรของพลังงาน		
	3.2.4 อธิบายความหมายของกำลังงาน		
	3.2.5 อธิบายความหมายของประสิทธิภาพทางกล		
	3.2.6 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน		
	3.3 เข้าใจหลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัมได้ถูกต้อง		
	3.3.1 อธิบายความหมายของอิมพัลส์และโมเมนตัม	3	-
	3.3.2 อธิบายสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น		
	3.3.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น		
	3.3.4 อธิบายสมการอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงมุม		
	3.3.5 อธิบายหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงมุม		
	3.3.6 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม		
	3.4 เข้าใจหลักการของการกระทบได้ถูกต้อง		
	3.4.1 อธิบายความหมายของการกระทบ	3	-
	3.4.2 อธิบายลักษณะของการกระทบแบบ Direct central Impact		
	3.4.3 อธิบายสมการการกระทบแบบ Direct central Impact		
	3.4.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การกระทบแบบ Direct central Impact		
	3.4.5 อธิบายลักษณะของการกระทบแบบ Oblique central Impact		
	3.4.6 อธิบายสมการการกระทบแบบ Oblique central Impact		
	3.4.7 อธิบายหลักการวิเคราะห์การกระทบแบบ Oblique central Impact		
	3.4.8 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของการกระทบ		

จุดประสงค์การสอน

หน่วยที่	รายการจุดประสงค์การสอน	คาบเรียน	
		ท	ป
4	**จลนศาสตร์ของระบบอนุภาค**	**6**	-
	4.1 เข้าใจสมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคได้ถูกต้อง	1	-
	4.1.1 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค		
	4.1.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค		
	4.1.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้สมการการเคลื่อนที่		
	4.2 เข้าใจสมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาคได้ถูกต้อง	1	-
	4.2.1 อธิบายสมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาค		
	4.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์งานและพลังงานของระบบอนุภาค		
	4.2.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน		
	4.3 เข้าใจสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมได้ถูกต้อง	1	-
	4.3.1 อธิบายสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค		
	4.3.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค		
	4.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม		
	4.4 เข้าใจสมการการไหลของมวลแบบทรงตัวมั่นได้ถูกต้อง	1.5	-
	4.4.1 อธิบายลักษณะการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น		
	4.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การไหลของมวลแบบทรงตัวมั่น		
	4.4.3 คำนวณการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น		
	4.5 เข้าใจสมการของระบบมวลแปรผันได้ถูกต้อง	1.5	-
	4.5.1 อธิบายลักษณะการไหลของระบบมวลแบบแปรผัน		
	4.5.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน		
	4.5.3 คำนวณการไหลของระบบมวลแบบแปรผัน		

จุดประสงค์การสอน

หน่วยที่	รายการจุดประสงค์การสอน	คาบเรียน	
		ท	ป
5	**จลนศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ**	**6**	-
	5.1 **เข้าใจการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบได้ถูกต้อง**	1	-
	5.1.1 อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ		
	5.1.2 จำแนกลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ		
	5.2 เข้าใจการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่ได้ถูกต้อง	1	-
	5.2.1 อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่		
	5.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่		
	5.2.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่		
	5.3 เข้าใจการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้จุดหมุนชั่วขณะได้ถูกต้อง	1	-
	5.3.1 อธิบายความหมายของจุดหมุนชั่วขณะ		
	5.3.2 อธิบายการหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้จุดหมุนชั่วขณะ		
	5.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้จุดหมุนชั่วขณะ		
	5.4 เข้าใจการหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง	3	-
	5.4.1 อธิบายความแตกต่างระหว่างการเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์กับแบบสัมพัทธ์		
	5.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์		
	5.4.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงขนานกับแนวเดิม		
	5.4.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงหมุน		
	5.4.4 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของการเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์		

จุดประสงค์การสอน

หน่วยที่	รายการจุดประสงค์การสอน	คาบเรียน	
		ท	ป
6	**จลนพลศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ**	**9**	-
	6.1 เข้าใจหลักการโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลได้ถูกต้อง	1	-
	6.1.1 อธิบายสมการของโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล		
	6.1.2 อธิบายความหมายของรัศมีไจเรชั่น		
	6.1.3 คำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล		
	6.2 เข้าใจสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง	2	-
	6.2.1 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นตรง		
	6.2.2 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง		
	6.2.3 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบการหมุนรอบแกนคงที่		
	6.2.4 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ		
	6.2.5 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบหมุน		
	6.3 เข้าใจหลักการของงานและพลังงานของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง	3	-
	6.3.1 อธิบายสมการงานและพลังงานของวัตถุเกร็ง		
	6.3.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน		
	6.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน		
	6.4 เข้าใจหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง	3	-
	6.4.1 อธิบายสมการอิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง		
	6.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม		
	6.4.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม		

การประเมินผลรายวิชา

รายวิชานี้แบ่งออกเป็น 6 หน่วย แยกได้ 25 บทเรียน การวัดและประเมินผลรายวิชาจะดำเนินการดังนี้

1. วิธีการ ดำเนินการรวบรวมข้อมูลเพื่อการประเมินผล แยกเป็น 3 ส่วน โดยแบ่งแยกคะแนน แต่ละส่วนจากคะแนนเต็ม ทั้งรายวิชา 100 คะแนน

ผลงานที่มอบหมาย 20 หรือ 20 %

พิจารณาจากกิจนิสัย ความตั้งใจ และการเข้าร่วมกิจกรรม 10 คะแนน หรือ 10 %

การทดสอบแต่ละหน่วยเรียน 70 คะแนน หรือ 70 %

โดยจัดแบ่งน้ำหนักคะแนนในแต่ละหน่วยตามตารางหน้าถัดไป

2. เกณฑ์ผ่านรายวิชา ผู้ที่จะผ่านรายวิชานี้จะต้อง

2.1 คะแนนผลงานที่มอบหมายไม่ต่ำกว่า 14 คะแนนหรือ 70 %

2.2 มีเวลาเข้าเรียนไม่ต่ำกว่า 8 คะแนนหรือ 80 %

2.3 ผลการทดสอบและประเมินผล โดยมีคะแนนตามเกณฑ์ที่กำหนดไว้ในตารางน้ำหนักคะแนนและเกณฑ์ผ่าน

2.4 ได้ผลรวมคะแนนทั้งหมดไม่ต่ำกว่า 50 คะแนนหรือ 50 %

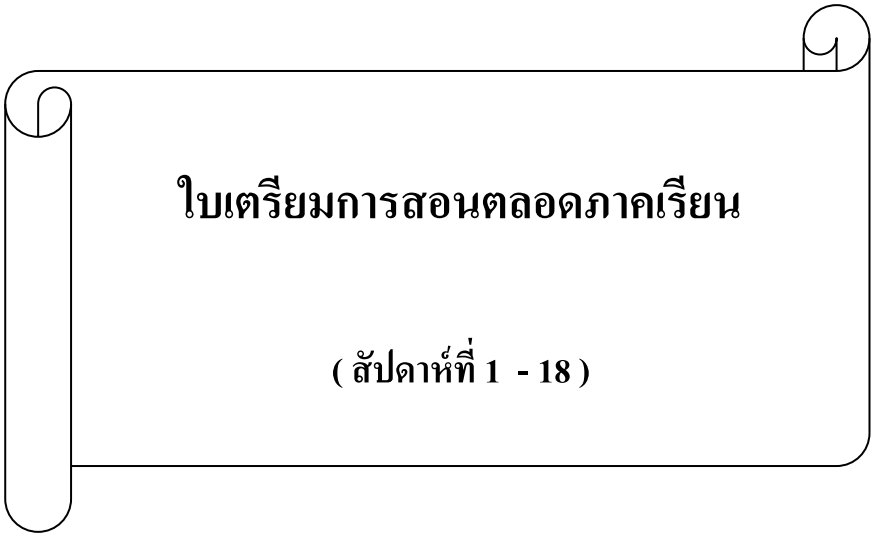
3. เกณฑ์ค่าระดับคะแนน

1. พิจารณาเกณฑ์ผ่านรายวิชาตามข้อ 2 ผู้ที่ไม่ผ่านตามเกณฑ์ข้อ 2 จะได้รับระดับคะแนน F
2. ผู้ที่สอบผ่านเกณฑ์ข้อ 2 จะได้รับค่าระดับคะแนนตามเกณฑ์ดังนี้

คะแนนร้อยละ	81 ขึ้นไป	ได้	A
คะแนน	76-80	ได้	B^+
คะแนน	71-75	ได้	B
คะแนน	66-70	ได้	C^+
คะแนน	61-65	ได้	C
คะแนน	56-60	ได้	D^+
คะแนน	50-55	ได้	D
คะแนนต่ำกว่าร้อยละ	50	ได้	F

ตารางกำหนดน้ำหนักคะแนน

เลขที่หน่วย	คะแนนรายหน่วยและน้ำหนักคะแนน / ชื่อหน่วย	คะแนนรายหน่วย	น้ำหนักคะแนน				
			พุทธพิสัย				ทักษะพิสัย
			ความรู้-ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	สูงกว่า	
1	หลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์วิศวกรรม	5	2	3	-	-	-
2	จลนศาสตร์ของอนุภาค	15	4	5	6	-	-
3	จลนพลศาสตร์ของอนุภาค	15	4	7	4	-	-
4	จลนศาสตร์ของระบบอนุภาค	11	3	6	2	-	-
5	จลนศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ	11	2	6	3	-	-
6	จลนพลศาสตร์ของวัตถุเกร็ง	13	4	6	3	-	-
	รวม	70	19	33	18	-	-
ก	คะแนนภาควิชาการ	70					
ข	คะแนนภาคผลงาน	20					
ค	คะแนนจิตพิสัย	10					
	รวมทั้งสิ้น	100					



ใบเตรียมการสอนตลอดภาคเรียน

(สัปดาห์ที่ 1 - 18)

สัปดาห์ที่ 1	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 1 หลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 1/11

ชื่อบทเรียน

11 นิยามที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์วิศวกรรม

12 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน

จุดประสงค์การสอน

11 เข้าใจนิยามที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์วิศวกรรมได้ถูกต้อง

111 อธิบายความแตกต่างระหว่างสถิตศาสตร์กับพลศาสตร์

112 อธิบายความแตกต่างระหว่างคิเนเมติกส์กับคิเนติกส์

113 อธิบายความแตกต่างระหว่างระยะทางกับการขจัด

114 อธิบายความแตกต่างระหว่างอัตราเร็วกับความเร็ว

115 อธิบายความแตกต่างระหว่างมวลกับน้ำหนัก

116 อธิบายความแตกต่างระหว่างความเร่งกับความหน่วง

12 เข้าใจกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันได้ถูกต้อง

121 อธิบายกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 1 ของนิวตัน

122 อธิบายกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

123 อธิบายกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 3 ของนิวตัน

124 อธิบายกฎความกฎความโน้มถ่วง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 2/11

เนื้อหา

หลักการเบื้องต้นของพลศาสตร์

กลศาสตร์(Mechanics) เป็นวิชาที่ศึกษาเกี่ยวกับวัตถุในสภาวะหยุดนิ่งหรือในสภาวะที่เคลื่อนที่ ศึกษาเกี่ยวกับแรงและผลของแรงที่กระทำต่อวัตถุ แบ่งออกเป็น 2 แขนงใหญ่ ๆ ดังนี้

1) สถิตศาสตร์ (Statics) เป็นการกล่าวถึงวัตถุที่อยู่ในสภาวะหยุดนิ่ง (สมดุล) ดังนั้น สถิตศาสตร์จึงศึกษาถึงการวิเคราะห์แรงและการแก้ปัญหาของระบบแรง

2) พลศาสตร์ (Dynamics) จะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุ และผลของแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ พลศาสตร์จะอาศัยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันเป็นหลัก บางทีจึงเรียกว่า Newtonian Mechanics แบ่งออกได้เป็น 2 แขนงย่อย ดังนี้

คิเนเมติกส์(Kinematics) กล่าวถึงลักษณะการเคลื่อนที่เชิงเรขาคณิตของวัตถุโดยไม่คำนึงถึงแรงที่มากระทำกับวัตถุหรือแรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ ดังนั้นคิเนติกส์จึงกล่าวถึง การขจัด(Displacement) ความเร็ว(Velocity) ความเร่ง(Acceleration) และเวลา(Time)

คิเนติกส์ (Kinetics) กล่าวถึง ความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำต่อวัตถุ มวลของวัตถุและการเคลื่อนที่ของวัตถุ จลนศาสตร์ของอนุภาคใช้การคาดคะเนลักษณะการเคลื่อนที่ อันเป็นผลมาจากแรงที่กระทำหรือใช้ในการกำหนดแรงที่กระทำต่อวัตถุ เพื่อให้วัตถุมีการเคลื่อนที่ตาม

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 3/11
เนื้อหา	

1.1 นิยามที่เกี่ยวข้องกับพลศาสตร์วิศวกรรม

คำนิยามต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับวิชากลศาสตร์นั้น เราจำเป็นต้องทราบถึงความหมายของนิยามเหล่านั้น เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ถูกต้อง

ระวางที่(Space) : คือ อาณาบริเวณรูปทรงเรขาคณิตที่มีเหตุการณ์เกิดขึ้น โดยทั่วไปจะหมายถึงอาณาบริเวณสามมิติ แต่ถ้าเป็นการเคลื่อนที่ตามแนวเส้นตรงหรือในระนาบ เราก็จะพิจารณาพียง 1 มิติหรือ 2 มิติตามลำดับ

กรอบอ้างอิง(Reference Frame) : การกำหนดตำแหน่งของวัตถุนั้น เราจะอาศัยการวัดโดยการเปรียบเทียบกับแกนอ้างอิงเป็นหลัก สำหรับการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน แกนอ้างอิงเรียกว่า Primary Inertial System หรือ Astronomical Frame of Reference ประกอบด้วยแกนคงที่สามแกนที่ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ค่าต่าง ๆ ที่วัดโดยเปรียบเทียบกับแกนอ้างอิงนี้คือค่าสัมบูรณ์ (Absolute) โดยทั่วไปจะกำหนดให้แกนอ้างอิงอยู่ติดกับผิวโลก ฉะนั้นการคำนวณเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ซึ่งอยู่ห่างจากผิวโลกมาก ๆ จึงต้องคำนึงถึงผลการหมุนของโลกด้วย อย่างไรก็ตาม ปัญหาในทางวิศวกรรม ส่วนใหญ่มักเกิดขึ้นใกล้ผิวโลก ดังนั้นผลที่เกิดจากการหมุนของโลกจึงมีค่าน้อยมาก ดังนั้นค่าต่าง ๆ ที่วัดได้โดยเทียบกับแกนอ้างอิงที่อยู่ติดกับผิวโลกจึงสามารถถือเป็นค่าสัมบูรณ์ได้

เวลา (Time) : ในระบบหน่วยระหว่างชาติ (SI Unit) ใช้หน่วยเวลาเป็นวินาที ช่วงเวลา 1 วินาที เท่ากับ 9,192,631,770 เท่าของคาบเวลาการแผ่รังสีของอะตอม Cesium-133

ความยาว(Length) : ในระบบหน่วยระหว่างชาติ(SI Unit) ใช้หน่วยความยาวเป็นเมตร โดยความยาว 1 เมตรเท่ากับ 1,650,763.73 เท่าของความยาวคลื่นการแผ่รังสีของอะตอม Krypton-86

แรง(Force) : คือ การกระทำของวัตถุหนึ่งต่ออีกวัตถุหนึ่ง แรงจะพยายามเคลื่อนวัตถุที่ถูกกระทำให้ไปในทิศทางเดียวกับแรงหรือพยายามหมุนวัตถุรอบแกนใดแกนหนึ่ง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 4/11

เนื้อหา

สสาร(Matter) : คือ สารที่ต้องการที่อยู่ ส่วนวัตถุ (Body) เป็นสสารที่มีผิวปิดโดยรอบ

ความเฉื่อย(Inertia) : คือ คุณสมบัติของสสารในการต้านทานการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่

มวล(Mass) : คือปริมาณที่ใช้วัดค่าความเฉื่อย มวลของวัตถุจะมีคุณสมบัติในการดึงดูดซึ่งกันและกัน

อนุภาค(Particle) : คือวัตถุซึ่งเราถือว่าไม่มีขนาด ในทางคณิตศาสตร์ ถือว่ามีขนาดเข้าใกล้ศูนย์หรือเป็นจุด การกำหนดตำแหน่งของวัตถุในบางครั้งนั้น เพื่อให้ง่ายขึ้นเราอาจจะถือว่าวัตถุนั้นเป็นอนุภาคก็ได้

วัตถุเกร็ง(Rigid Body) : คือวัตถุซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างเมื่อถูกแรงกระทำ โดยทั่วไปแล้วการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างมีน้อยมาก เมื่อเทียบกับขนาดทั้งหมดของวัตถุก็อาจถือได้ว่าวัตถุนั้นเป็นวัตถุเกร็ง

วัตถุแปรรูป(Deformable Body) :
คือวัตถุซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างเมื่อถูกแรงกระทำ ในกรณีที่พิจารณาถึงผลการกระทำของแรงต่อภายในเนื้อวัตถุ ซึ่งทำให้เกิดความเค้น (Stress) และความเครียด(Strain) ภายในเนื้อวัตถุนั้น การคำนึงถึงการเปลี่ยนแปลงของขนาดและรูปร่างนี้จึงมีความสำคัญมาก

สเกลาร์(Scalar) : คือ ปริมาณที่มีเฉพาะขนาด เช่น เวลา ปริมาตร ความหนาแน่น อัตราเร็ว พลังงาน และมวล เป็นต้น

เวกเตอร์(Vector) : คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง การรวมกันต้องเป็นไปตามกฎของสี่เหลี่ยมด้านขนาน(Parallelogram Law) เช่น การขจัด(Displacement) ความเร็ว(Velocity) ความเร่ง(Acceleration) แรง(Force) โมเมนต์(Moment) เป็นต้น

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 1 เลขหน้า 5/11

เนื้อหา

หน่วยและมิติ

หน่วยทางกลศาสตร์โดยพื้นฐานแล้วมี 4 ชนิด คือ ความยาว มวล แรง และ เวลา โดยตามปกติแล้ว เรามักใช้อยู่ 2 ระบบ คือ หน่วยเอสไอและหน่วยอังกฤษ (British System of Unit) นั้น ได้แสดงดังตารางต่อไปนี้

		หน่วย SI		หน่วย U.S.	
ปริมาณ	**สัญลักษณ์ของมิติ**	**หน่วย**	**สัญลักษณ์**	**หน่วย**	**สัญลักษณ์**
มวล	M	กิโลกรัม	kg	สลัก	slug
ความยาว	L	เมตร	m	ฟุต	ft.
เวลา	T	วินาที	s	วินาที	sec.
แรง	F	นิวตัน	N	ปอนด์	lb.

1.1.3 ค่าอุปสรรค (Prefixes)

ค่าอุปสรรค คือ คำนำหน้าหน่วย SI ซึ่งสามารถแสดงได้ดังตารางดังต่อไปนี้

ปริมาณ	ตัวคูณ	ค่าอุปสรรค	สัญลักษณ์
1,000,000,000	10^{9}	Giga	G
1,000,000	10^{6}	Mega	M
1,000	10^{3}	Kilo	k
100	10^{2}	Hecto	h
10	10	Deka	da
0.1	10^{-1}	Deci	d
0.01	10^{-2}	Centi	c
0.001	10^{-3}	Milli	m
0.000001	10^{-6}	Micro	μ
0.000000001	10^{-9}	Nano	n
0.000000000001	10^{-12}	Pico	p
0.000000000000001	10^{-15}	Femto	f

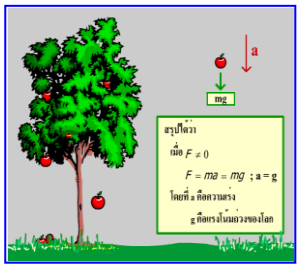
ตัวอย่าง เช่น ความยาว 5,000 เมตร เขียนได้เป็น 5 km. หรือ มวล 0.0326 kg. เขียนได้เป็น 32.6 g. เป็นต้น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 6/11

เนื้อหา

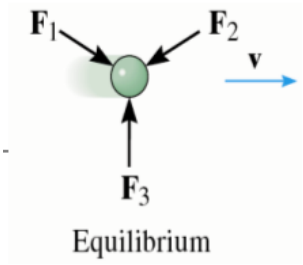
1.2 กฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน (Newton 's Law of Motion)

เซอร์ไอแซค นิวตัน (ค.ศ. 1642-1727) เป็นนักวิทยาศาสตร์ฟิสิกส์ผู้มีชื่อเสียงที่สุดคนหนึ่งของอังกฤษ เกิดที่เมืองลินคอล์นเชียร์ เซอร์ไอแซค นิวตัน ได้ค้นพบกฎการเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งกล่าวว่า



กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 1

กฎข้อที่ 1 (First Law) กล่าวว่า วัตถุจะยังคงสภาพหยุดนิ่งหรือการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เว้นเสียแต่ว่าจะมีแรงที่ไม่สมดุลมากระทำ



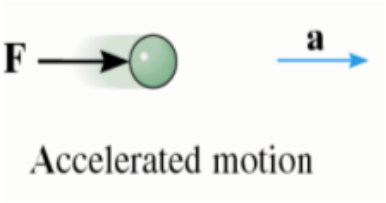
$$\Rightarrow \sum F = 0$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 7/11

เนื้อหา

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 2

กฎข้อที่ 2 (Second Law) กล่าวว่า ความเร่งของวัตถุจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับแรงลัพธ์ที่มากระทำ และจะมีทิศทางเดียวกันกับแรงลัพธ์นั้น



$$\Rightarrow \quad \sum F = ma$$

กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันข้อที่ 3

กฎข้อที่ 3 (Third Law) กล่าวว่า เมื่อมีแรงกิริยามากระทำกับวัตถุ จะทำให้มีแรงปฏิกิริยาที่มีขนาดเท่ากับแรงกิริยาที่มากระทำ แต่จะมีทิศทางตรงกันกันข้าม

(ก) (ข) (ค)

ตัวอย่างเช่น ถ้าเราออกแรงผลักกำแพง ดังแสดงในภาพ (ก) ด้วยแรง F ทิศทางที่แสดงในภาพ (ข) จะพบว่าจะมีแรงต้านการออกแรงผลักของเรา โดยที่ขนาดของแรงต้านนั้น จะมีขนาดเท่ากับแรงที่ผลัก แต่จะมีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า

Action Force = Reaction Force

เมื่อ

Action Force หมายถึง แรงกริยา

Reaction Force หมายถึง แรงปฏิกิริยา

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 8/11

เนื้อหา

กฎความโน้มถ่วง (Gravitation)

มวลมีคุณสมบัติในการดึงดูดกัน ซึ่งแรงดึงดูดนี้ หาได้จากกฎแห่งความโน้มถ่วงของนิวตัน (Newton 's Law of Gravitation) โดยหาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$F = G\frac{(m_1 m_2)}{r^2}$$

เมื่อ

F = แรงดึงดูดซึ่งกันและกันระหว่างมวล m_1 และ m_2

G = ค่าคงที่ของความโน้มถ่วงของโลก (Universal Constant หรือ Constant of Gravitations)

= 6.673×10^{-11} $\frac{m^3}{kg.s^2}$ (ค่าคงที่)

r = ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของมวล m_1 และ m_2

และจากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน (F = ma) กล่าวว่า เมื่อวัตถุตกลงมาในสุญญากาศ สู่ผิวโลกด้วยความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก (g) ดังนั้น F = mg

จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้ คือ

$$mg = G\frac{(m)(m_o)}{r^2}$$

เมื่อ m = มวลของวัตถุ

m_o = มวลของโลก = 5.9742×10^{24} kg.

r = รัศมีของโลก = 6.371×10^6 m. = 6,371 km.

ดังนั้นจะสามารถหาค่าแรงโน้มถ่วงของโลกที่ระดับความสูงใด ๆ ได้ดังนี้

$$g = g_o \frac{r^2}{(r+h)^2}$$

เมื่อ

g_o = ความเร่งสัมบูรณ์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่ระดับน้ำทะเล = 9.81 m/s^2

h = ความสูงเหนือระดับน้ำทะเล

r = รัศมีของโลก = 6,371 km.

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 9/11

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้

ข้อที่ 1. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างสถิตศาสตร์ (STATICS) กับ พลศาสตร์ (DYNAMICS)

ข้อที่ 2. จงอธิบายความแตกต่างระหว่าง KINEMATICS กับ KINETICS

ข้อที่ 3. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างปริมาณเวกเตอร์ (VECTOR) กับ ปริมาณสเกลาร์ (SCALAR)

ข้อที่ 4. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างมวล (MASS) กับ น้ำหนัก (WEIGHT)

ข้อที่ 5. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างระยะทาง (DISTANCE) กับ การขจัด (DISPLACEMENT)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 10/11
แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน	

ข้อที่ 6. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างอัตราเร็ว (SPEED) กับ ความเร็ว (VELOCITY)

ข้อที่ 7. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างความเร่ง (ACCELERATION)กับความหน่วง (DECELERATION)

ข้อที่ 8. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างวัตถุเกร็ง (RIGID BODY) กับ วัตถุแปรรูป (DEFORMABLE BODY)

ข้อที่ 9. จงอธิบายกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันทั้งสามข้อ

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>หนังสืออ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 7-12
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 7-11
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 8
- เอกสารหมายเลข 5 หน้าที่ 4-5
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 1-7</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 1
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 1
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 1</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
- ให้นักศึกษาไปศึกษาและทบทวนเรื่องเกี่ยวกับการแปลงหน่วย
- ให้นักศึกษาไปศึกษาและทบทวนเรื่องปริมาณเวกเตอร์</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 2	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 2 จลนศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 1/26

ชื่อบทเรียน

2.1 การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค

จุดประสงค์การสอน

2.1 เข้าใจลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาคได้ถูกต้อง

2.1.1 อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค

2.1.2 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ในแนวราบ

2.1.3 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง

2.1.4 อธิบายความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณต่าง ๆ

2.1.5 คำนวณการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 2/26

เนื้อหา

จลนศาสตร์ของอนุภาค

จลนศาสตร์ของอนุภาคจะศึกษาถึงลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาค ดังนั้นเราจึงอาจเรียกว่า "การเคลื่อนที่เชิงเรขาคณิต" (Geometry of Motion) ก็ได้ ความหมายของอนุภาคนั้นไม่ได้หมายความถึงวัตถุที่มีขนาดเล็ก ๆ เท่านั้น วัตถุที่มีขนาดใหญ่ เช่น รถยนต์ จรวด เครื่องบิน เราก็สามารถคิดว่าเป็นอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่ได้ ตราบใดที่การเคลื่อนที่นั้น เป็นระยะทางที่ยาวมาก ทำให้สามารถพิจารณาว่าวัตถุนั้นเป็นหน่วยเล็กๆ หน่วยหนึ่งที่กำลังเคลื่อนที่ โดยที่ผลการหมุนรอบตัวเองหรือรอบจุดศูนย์ถ่วงนั้นน้อยมาก จนไม่ต้องนำมาคิด ในการคำนวณที่นำผลของการหมุนรอบตัวเองเข้ามาเกี่ยวข้องด้วยแล้ว จะเป็นการศึกษาเกี่ยวกับจลนศาสตร์ของวัตถุเกร็ง(Kinetics of Rigid Bodies) ซึ่งจะได้กล่าวในตอนต่อไป

จลนศาสตร์ของอนุภาคจะไม่กล่าวถึงแรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่หรือการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ แต่จะกล่าวถึง การขจัด ความเร็ว ความเร่ง ของอนุภาคขณะใดขณะหนึ่ง เช่น การศึกษาถึงวิถีโคจรของจรวด เครื่องบิน หรือยานพาหนะต่าง ๆ การออกแบบลักษณะของลูกเบี้ยว เฟือง และข้อต่อต่าง ๆ เพื่อควบคุมให้ลักษณะการเคลื่อนที่ของเครื่องจักรกลเป็นไปตามต้องการ

ลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาค

ลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาค แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

1. การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear Motion)
2. การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง (Curvilinear Motion)

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือวัตถุเกร็ง เพื่อหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรต่าง ๆ อาทิ เช่น การขจัด ความเร็ว ความเร่ง เป็นต้น อาจกระทำได้ 2 วิธี คือ

1) การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์ (Absolute Motion Analysis)
หมายถึง การบอกค่าตัวแปรต่าง ๆ โดยการวัดจากระบบแกนอ้างอิงอยู่คงที่

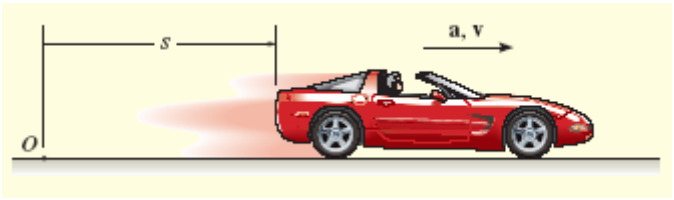
2) การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์ (Relative Motion Analysis)
หมายถึง การบอกค่าตัวแปรต่าง ๆ โดยการวัดจากระบบแกนอ้างอิงที่มีการหมุน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 3/26
เนื้อหา	

การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงของอนุภาค

การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงแบ่งการเคลื่อนที่ได้เป็น 2 ลักษณะ คือ

การเคลื่อนที่ในแนวราบ



รูปที่ 2.1 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบ

การเคลื่อนที่ในแนวราบ หมายถึง เป็นการเคลื่อนที่ที่ขนานกับพื้นผิวของโลก โดยแบ่งลักษณะของการเคลื่อนที่ ออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

ก) การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่

รูปที่ 2.2 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบ ด้วยความเร็วคงที่

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 4/26

เนื้อหา

การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร็วไม่คงที่

ความเร็วที่ตำแหน่ง A (V_A) $\neq$ ความเร็วที่ตำแหน่ง B (V_B)

$$V_A \neq V_B$$

รูปที่ 2.3 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบ ด้วยความเร็วไม่คงที่

การเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร่งคงที่

ความเร็วที่ตำแหน่ง A (a_A) = ความเร็วที่ตำแหน่ง B (a_B)

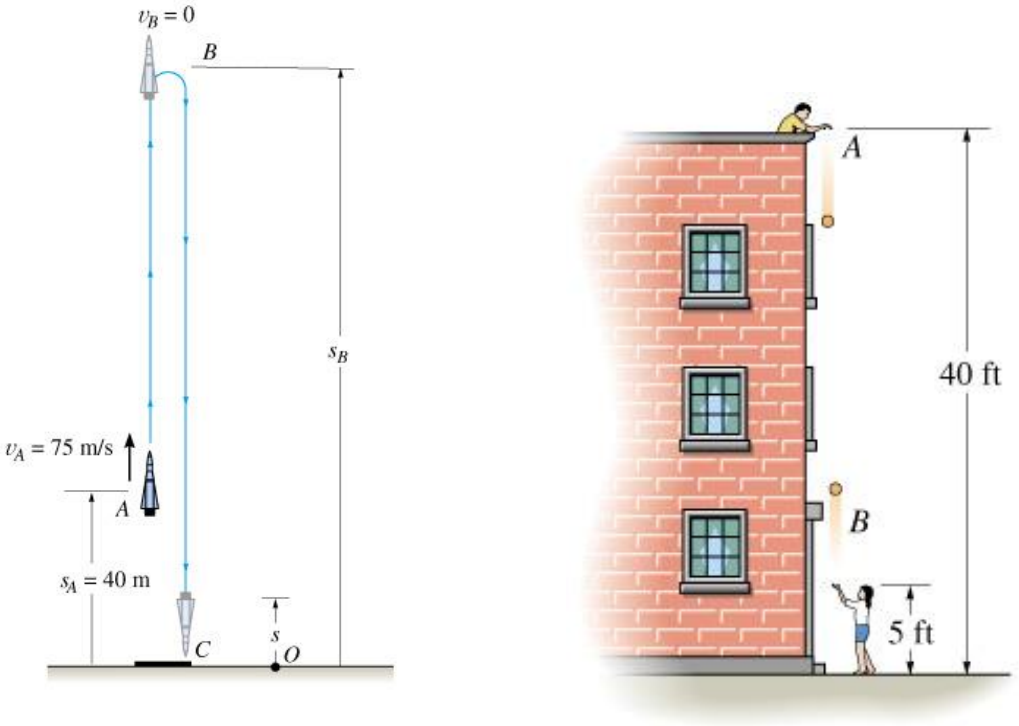
$$a_A = a_B$$

รูปที่ 2.4 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบ ด้วยความเร่งคงที่

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 5/26

เนื้อหา

การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง



รูปที่ 2.5 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงในแนวราบ ด้วยความเร่งคงที่

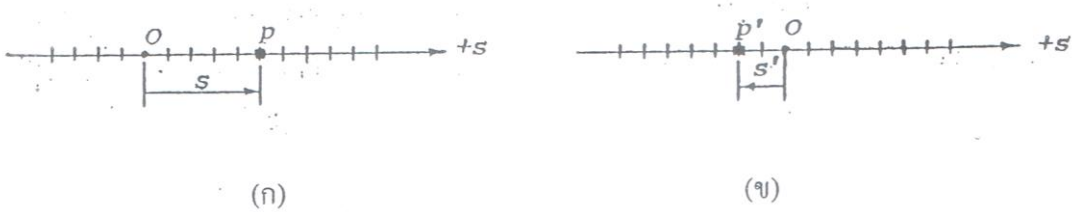
การเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง หมายถึง เป็นการเคลื่อนของอนุภาคหรือวัตถุใด ๆ ที่ตั้งฉากกับพื้นผิวของโลก ดัง เช่น การยิงจรวดขึ้นบนท้องฟ้าในแนวดิ่ง หรือ การโยนวัตถุใด ๆ จากที่สูงลงมาบนพื้นดิน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 6/26

เนื้อหา

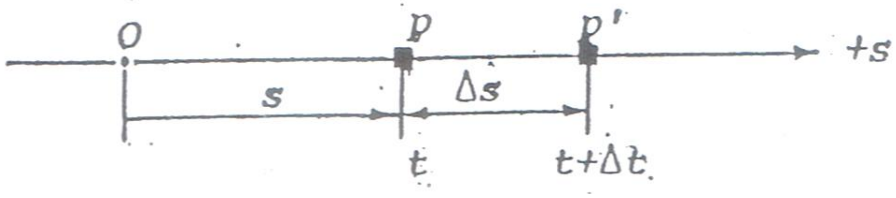
การกำหนดตำแหน่งของอนุภาค (การขจัด) : ก่อนอื่นเราจะต้องตั้งแกนในแนวเส้นตรงที่อนุภาคเคลื่อนที่พร้อมทั้งกำหนดทิศทาง บวก ลบ และตำแหน่งของจุดเริ่มต้นนับ (Origin) , O

ที่เวลา t ใด ๆ ตำแหน่งของอนุภาคหรือการขจัดของอนุภาคก็คือ ระยะห่างจากจุด O ในทิศทางบวกหรือลบ ดังรูปที่ 2.6 (ก) อนุภาคที่ตำแหน่ง P ในขณะนั้น มีการขจัด s = +5 m. หรือ ดังรูปที่ 2.6 (ข) อนุภาคที่ตำแหน่ง P′ ในขณะนั้น มีการขจัด s′ = -2 m. เป็นต้น



รูปที่ 2.6 การกำหนดตำแหน่งของอนุภาค

ความเร็ว (Velocity) : พิจารณาเมื่อเวลา t อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง p มีการขจัด s เมื่อเวลาผ่านไป $t+\Delta t$ อนุภาคเคลื่อนมาอยู่ที่ตำแหน่ง p′ ซึ่งมีการขจัด $s+\Delta s$ ดังรูปที่ 2.7 ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา Δt คือ การเปลี่ยนแปลงของระยะทางต่อหน่วยเวลา ดังนั้นความเร็วเฉลี่ย $v_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$



รูปที่ 2.7 การหาความเร็วของอนุภาค

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 7/26

เนื้อหา

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous Velocity)

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous Velocity) ของอนุภาค ที่เวลา t หาได้จากความเร็วเฉลี่ยโดยจำกัดช่วงเวลา Δt ให้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือ

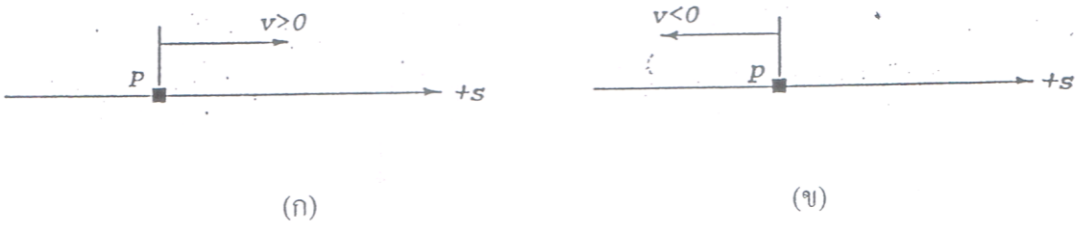
$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง $v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$ …(2.1)

ในที่นี้ อนุภาคมีการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง ซึ่งเราทราบแนวการเคลื่อนที่และทิศทางการเคลื่อนที่ ดังนั้น การระบุความเร็วของอนุภาค จะประกอบไปด้วยขนาดและทิศทางของความเร็ว โดยทิศทางนั้นกำหนดได้โดยเครื่องหมายบวกหรือลบ

ก.) ถ้าความเร็ว v มีเครื่องหมายเป็นบวก แสดงว่า การเคลื่อนที่จะทำให้ s มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ อนุภาคนั้นจะเคลื่อนที่ไปทางขวามือ ตามทิศทางของแกนบวก ดังรูปที่ 2.8 (ก)

ข.) ถ้าความเร็ว v มีเครื่องหมายเป็นลบ แสดงว่าการเคลื่อนที่จะทำให้ s มีค่าลดลง นั่นคือ อนุภาคนั้นจะเคลื่อนที่ไปทางซ้ายมือ ตามทิศทางของแกนลบ ดังรูปที่ 2.8 (ข)



(ก) (ข)

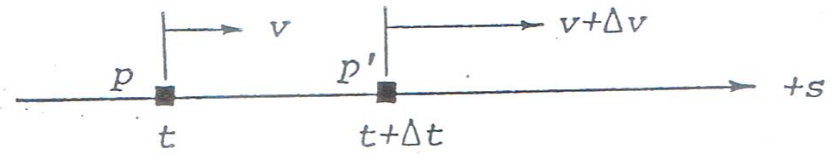
รูปที่ 2.8 ทิศทางของความเร็ว

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 8/26

เนื้อหา

ความเร่ง (Accelerations)

พิจารณาเมื่อเวลา t อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง p มีความเร็ว v เมื่อเวลาผ่านไป $t+\Delta t$ อนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ที่ตำแหน่ง p′ ซึ่งมีความเร็วเป็น $v+\Delta v$ ดังรูปที่ 2.9 ความเร่งเฉลี่ยในช่วงเวลา Δt คือ การเปลี่ยนแปลงของความเร็ว ต่อหน่วยเวลา ดังนั้น ความเร่งเฉลี่ย $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$



รูปที่ 2.9 การเกิดความเร่ง

ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง (Instantaneous Acceleration) ของอนุภาคที่เวลา t หาได้จากความเร่งเฉลี่ยโดยจำกัดช่วงเวลา Δt ให้มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

$$a_{av} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

ความเร่งขณะใดขณะหนึ่ง $a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}$ …(2.2)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}$$

จากสมการที่ 2.1 และ 2.2 จะได้สมการดังต่อไปนี้

$$vdv = ads \quad \text{…(2.3)}$$

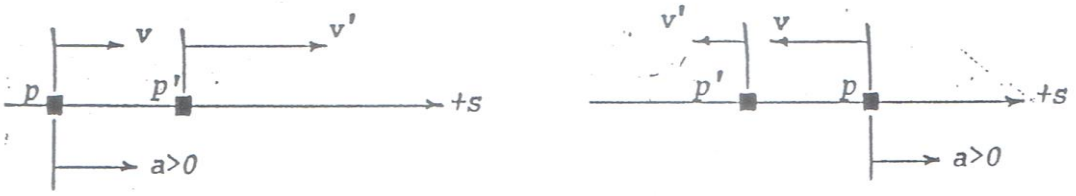
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 9/26

เนื้อหา

สำหรับเครื่องหมายของ a นั้น ก็เช่นเดียวกับ v คือ มีทั้งเครื่องหมายบวกและลบ

ในกรณีที่ a **มีเครื่องหมายเป็นบวก**

แสดงว่าอนุภาคมีค่าความเร็วเพิ่มขึ้น (Δv เป็นบวก) นั่นคือ อนุภาคกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเพิ่มขึ้นในทิศทางที่เป็นบวก ดังรูปที่ 2.10 (ก) หรืออนุภาคกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่ช้าลงในทิศทางที่เป็นลบ ดังรูปที่ 2.10 (ข)

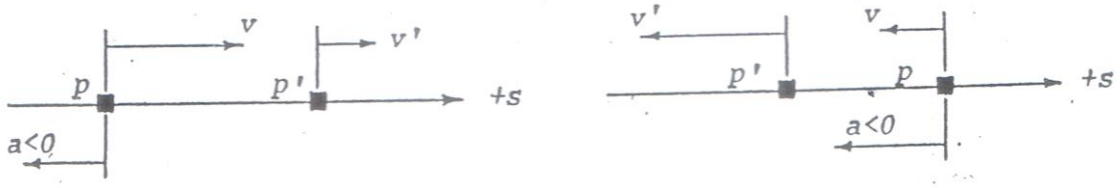


(ก) (ข)

รูปที่ 2.10 กรณีที่ที่ความเร่งมีค่าเป็นบวก

ในกรณีที่ a **มีเครื่องหมายเป็นลบ**

แสดงว่าอนุภาคมีค่าความเร็วเพิ่มขึ้น (Δv เป็นลบ) นั่นคือ อนุภาคกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วช้าลงในทิศทางที่เป็นบวก ดังรูปที่ 2.11 (ก) หรืออนุภาคกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เพิ่มขึ้นในทิศทางที่เป็นลบ ดังรูปที่ 2.11 (ข)



(ก) (ข)

รูปที่ 2.11 กรณีที่ความเร่งมีค่าเป็นลบ

ในบางครั้งเราจะใช้คำว่า ความหน่วง (Deceleration) แทนในกรณีที่อนุภาคนั้นมีอัตราความเร็วลดลงเรื่อย ๆ ในทิศทางของการเคลื่อนที่ เช่น ในรูปที่ 2.10 และ 2.11 (ก)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 10/26

เนื้อหา

ความเร่งคงที่

จากสมการที่ 2.1 , 2.2 และ 2.3 เราจะหาสูตรสำหรับการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ เพื่อให้ได้สูตรในรูปง่าย ๆ เราจึงกำหนดเงื่อนไขดังนี้

ณ. จุดเริ่มต้น เวลา $t = 0, s = 0, v = v_1$

$$\left[a = \frac{dv}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad \int_{v_1}^{v} dv = a\int_{0}^{t} dt$$

$$\Rightarrow \quad v = v_1 + at \qquad \ldots(2.4)$$

$$[vdv = ads] \quad \Rightarrow \quad \int_{v_1}^{v} vdv = a\int_{0}^{s} ds$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = v_1^2 + 2as \qquad \ldots(2.5)$$

$$\left[v = \frac{ds}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad \int_{0}^{s} ds = \int_{0}^{t} vdt$$

$$\Rightarrow \quad s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad \ldots(2.6)$$

ข้อควรจำ

สมการที่ 2.5 และ 2.6 จะใช้ได้ก็ต่อเมื่อ เป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดข้างต้น คือ ที่ $t = 0, s = 0$ ในกรณีที่ ที่ $t = 0$ แต่ $s \neq 0 (s_1 = s_2)$ ดังนั้น Limit ของ ds จะเป็น s_1 ถึง s สมการที่ 2.5 จะเป็น $v^2 = v_1^2 + 2a(s - s_1)$ และสมการที่ 2.6 จะเป็น $s - s_1 = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 11/26

เนื้อหา

ความเร่งเป็นฟังชั่นของเวลา $a = f(t)$

$$\left[a = \frac{dv}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad dv = adt$$

$$\Rightarrow \quad \int dv = \int f(t)\,dt \quad \text{จะได้ } v = f(t)$$

$$\left[v = \frac{ds}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad ds = vdt$$

$$\Rightarrow \quad \int ds = \int f(t)\,dt \qquad \text{จะได้ } s = f(t)$$

หรือ $\ddot{s} = a = f(t)$ $\qquad \iint d^2s = \iint f(t)\,dt\,dt$

ความเร่งเป็นฟังชั่นของความเร็ว $a = f(v)$

$$\left[a = \frac{dv}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dv}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \int dt = \int \frac{dv}{f(v)} \qquad \text{จะได้ } v = f(t)$$

$$[vdv = ads] \quad \Rightarrow \quad ds = \frac{vdv}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \int ds = \int \frac{vdv}{f(v)} \qquad \text{จะได้ } s = f(t)$$

หรือ $\left[v = \frac{ds}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad \int ds = \int f(t)\,dt$

ความเร่งเป็นฟังชั่นของการขจัด $a = f(s)$

$$[vdv = ads] \quad \Rightarrow \quad \int vdv = \int f(s)\,ds \text{ จะได้ } v = f(s)$$

หรือ $\left[v = \frac{ds}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{ds}{v}$

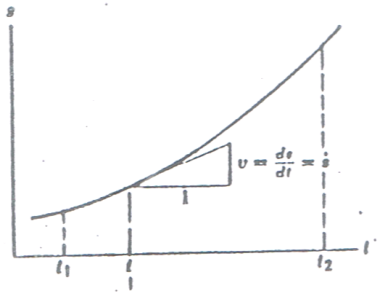
$$\Rightarrow \quad \int dt = \int \frac{ds}{f(s)} \qquad \text{จะได้ } t = f(s)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 12/26

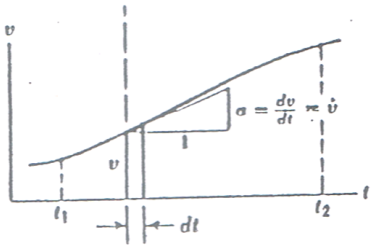
เนื้อหา

ความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณต่าง ๆ (Graphical Relation)

ความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณ การขจัด ความเร็ว ความเร่ง และเวลาของอนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง โดยอาศัยสมการดิฟเฟอเรนเชียลทั้งสาม (สมการที่ 2.1 , 2,2 และ 2.3) ประกอบกับการใช้กราฟ ดังนี้



(ก)



(ข)

รูปที่ 2.12 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ s - t และกราฟ v - t

รูป (ก) เป็นกราฟ s - t ความเร็วที่ขณะเวลา t คือ $v = \frac{ds}{dt}$ = ความชันของกราฟ s - t ที่เวลาขณะนั้น

รูป (ข) เป็นกราฟ v - t พื้นที่ใต้กราฟ v - t ความเร่งที่ขณะเวลา t คือ

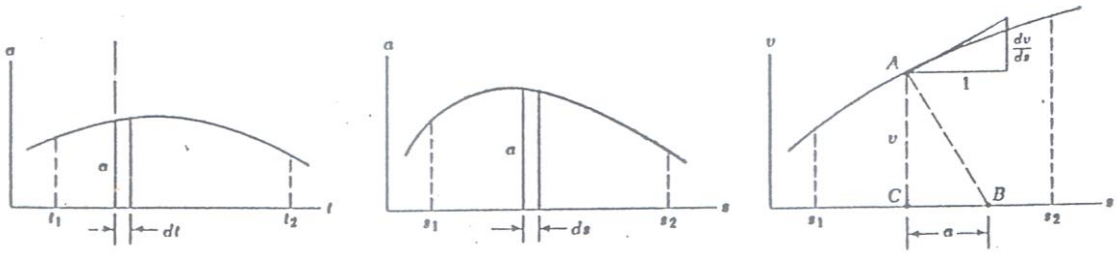
$a = \frac{dv}{dt}$ = ความชันของกราฟ v - t ที่เวลาขณะนั้นในช่วงเวลา dt มีค่าเท่ากับ vdt

$$\left[v = \frac{ds}{dt} \right] \quad \Rightarrow \quad \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v\,dt$$

$s_2 - s_1$ = พื้นที่ใต้กราฟ v - t ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 13/26

เนื้อหา



(ค) (ง) (จ)

รูปที่ 2.13 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ a - t , กราฟ a - s และกราฟ v - s

รูป (ค) เป็นกราฟ a - t พื้นที่ใต้กราฟ a - t ในช่วงเวลา dt มีค่าเท่ากับ adt

$$\left[a = \frac{dv}{dt}\right] \quad \Rightarrow \quad \int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} adt$$

$v_2 - v_1$ = พื้นที่ใต้กราฟ a - t ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2

รูป (ง) เป็นกราฟ a - s พื้นที่ใต้กราฟ a - s ในช่วงเวลา dt มีค่าเท่ากับ ads

$$[vdv = ads] \quad \Rightarrow \quad \int_{v_1}^{v_2} vdv = \int_{s_1}^{s_2} ads$$

$\frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2)$ = พื้นที่ใต้กราฟ a - s ในช่วง s_1 ถึง s_2

รูป (จ) เป็นกราฟแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง v กับ s ที่จุด A มีความชัน $\frac{dv}{ds}$ เท่ากับความเร่งที่จุด A หาได้โดยการลากเส้น AB ให้ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสที่จุด A ลากเส้นดิ่ง AC จากสามเหลี่ยมคล้าย 2 รูป

$$\frac{BC}{v} = \frac{dv}{ds} \qquad \Rightarrow \qquad vdv = BCds$$

จากสมการ vdv = ads ดังนั้น a = BC นั้น คือ ความเร่งที่จุด A หาได้โดยการวัดระยะ BC

การใช้ความสัมพันธ์ทางกราฟฟิคของปริมาณต่าง ๆ มีประโยชน์มากในกรณีที่มีการวิเคราะห์ปัญหาที่ได้มาจากการทดลอง เพราะเราอาจบอกไม่ได้ว่า a เป็นฟังชันก์ของอะไรบ้าง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 14/26

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยสมการ $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 6$ เมื่อการขจัด s เป็นเมตร และเวลา t เป็นวินาที จงหาความเร่ง a ของอนุภาคที่เวลา t = 0 , 2 และ 4 วินาที

วิธีทำ

หาอนุพันธ์ของ s เทียบกับเวลา t จะได้ความเร็ว v และเวลาอนุพันธ์ของ v เทียบกับเวลา t จะได้ความเร่ง a เป็นฟังก์ชันของ t จะได้ความเร่ง a เป็นฟังก์ชันของ t แทนค่า t จะได้ความเร่ง a ตามต้องการ

$$\because \quad x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 - 6$$

$$\therefore \quad v = \frac{ds}{dt} = t^2 - 4t$$

$$\therefore \quad a = \frac{ds}{dt} = 2t - 4$$

เมื่อ t = 0 ; ได้ $a = -4 \ m/s^2$

เมื่อ t = 2 ; ได้ a = 0

เมื่อ t = 4 ; ได้ $a = 4 \ m/s^2$ **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2 อนุภาคเคลื่อนที่ขึ้นในแนวดิ่งด้วยความเร็วต้น 240 m/s จงคำนวณหาความสูง h ที่อนุภาคสามารถขึ้นไปได้ และหาเวลา t ตั้งแต่เริ่มเคลื่อนที่ขึ้นจนกระทั่งตกลงสู่พื้น ไม่คิดแรงต้านอากาศและให้ค่า g ของโลกคงที่ตลอดเท่ากับ $9.81 \ m/s^2$

วิธีทำ

เนื่องจากความเร่งคงที่ ดังนั้นสามารถใช้สูตร $v^2 = v_0^2 + 2a(\Delta s)$ หาความสูง h ได้ และใช้สูตร $v = v_0 + 2at$ หาเวลา t ได้ ค่า a ที่ใช้สูตรจะเป็นลบ เพราะทิศทางของ a ตรงกับทิศทาง v_0

$$v^2 = v_0^2 + 2a(\Delta s)$$

$$0 = 240^2 - 2(9.81)\,h$$

$$h = \frac{240^2}{2(9.81)} = 2936 \ m$$

$$v = v_0 + 2at$$

$$-240 = 240 - 9.81(t)$$

$$t = \frac{480}{9.81} = 48.9 \ s$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 15/26

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 อนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความสัมพันธ์ $x = 2t^3 - 24t + 6$ เมื่อ x มี หน่วยเป็นเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงคำนวณหา

(ก) เวลาที่ใช้เมื่ออนุภาคมีความเร็ว $v = 72$ m/s เมื่อเริ่มต้นจาก $t = 0$ วินาที

(ข) ความเร่งของอนุภาคเมื่อ $v = 30$ m/s

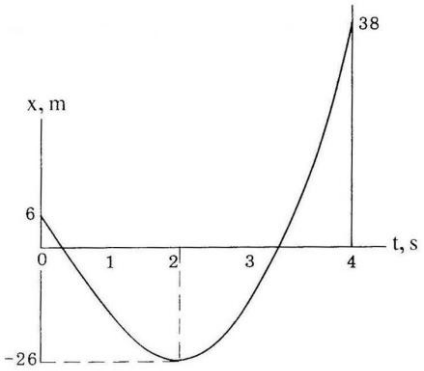
(ค) การกระจัดลัพธ์ของอนุภาคในช่วงเวลา $t = 1$ วินาทีถึง $t = 4$ วินาที

วิธีทำ

$$\therefore x = 2t^3 - 24t + 6 \qquad (1)$$

$$\therefore v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 24 \qquad (2)$$

$$\text{และ } a = \frac{dv}{dt} = 12t \qquad (3)$$



(ก) เวลาที่ใช้เมื่ออนุภาคมีความเร็ว 72 m/s เมื่อเริ่มต้นจาก $t = 0$ วินาที

จากสมการ (2) แทนค่า จะได้ $72 = 6t^2 - 24$

$$\therefore t = 4 \text{ s} \quad \text{(ใช้ค่าบวก)}$$ **ตอบ**

(ข) ความเร่งของอนุภาคเมื่อ $v = 30$ m/s

จากสมการ (2) แทนค่า v จะได้

$$30 = 6t^2 - 24$$

$$\therefore t = 3 \text{ s}$$

จากสมการ (3) จะได้ $a = 12(3) = 36 \text{ m/s}^2$ **ตอบ**

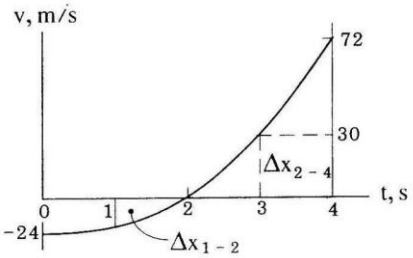
เนื้อหา

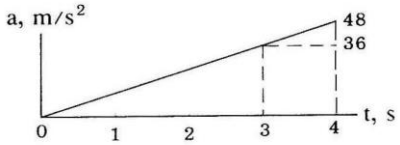
(ค) การกระจัดลัพธ์ของอนุภาคในช่วง t = 1 ถึง 4 วินาที

$$\Delta x = x_4 - x_1$$

$$= [\,2\,(4^3) - 24\,(4) + 6\,] - [2(1^3) - 24\,(1) + 6]$$

$$= 54 \text{ m}$$ **ตอบ**

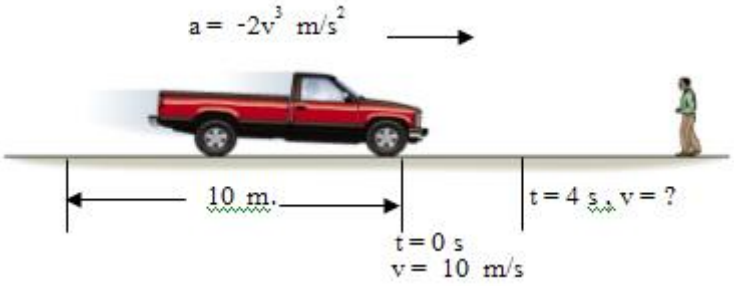




ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 2 เลขหน้า 17/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4 รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความหน่วงคงที่ $a = (-2v^3)\ m/s^2$ ถ้ารถยนต์คันนี้นี้มีความเร็ว v = 8 m/s และ s = 10 m. (ที่เวลา t = 0 s) จงหาอัตราเร็วและตำแหน่งของรถคันนี้ ที่เวลา t = 4 วินาที



วิธีทำ จากสมการ $a = \frac{dv}{dt}$ ดังนั้น

$$\Rightarrow \quad a = \frac{dv}{dt} = -2v^3$$

$$\int_8^v \frac{dv}{v^3} = -2\int_0^t dt$$

$$-\frac{1}{2v^2}\Big|_8^v = -2t$$

$$\frac{1}{v^2} - \frac{1}{8^2} = 4t$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{v^2} - \frac{1}{8^2} = 4t$$

$$\frac{1}{v^2} = 4t + \frac{1}{64}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1 + 256t}{64}$$

$$v^2 = \frac{64}{1 + 256t}$$

$$v^2 = \frac{8}{\sqrt{1 + 256t}}$$

$$v = 0.250\ m/s$$

นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที อนุภาคนี้ จะมีความเร็วเท่ากับ 0.250 เมตรต่อวินาที **ตอบ**

และสามารถหาระยะทางที่อนุภาคนี้เคลื่อนที่ได้เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที จาก

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{8}{\sqrt{1+256t}} \quad \Rightarrow \quad \int_{10}^{s} ds = \int_0^t \frac{8dt}{\sqrt{1+256t}}$$

$$s - 10 = \frac{8}{256}(2)\sqrt{1+256t}\Big|_0^t = \frac{1}{16}\left[\sqrt{1+256t} - 1\right]$$

$$s = 10 + \frac{1}{16}\left[\sqrt{1-256t} - 1\right]$$

$$s = 11.9\ m.$$

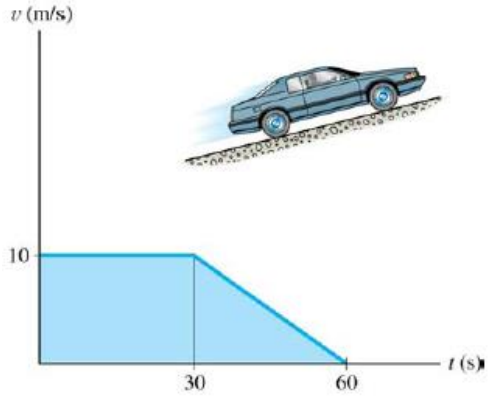
นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไป 4 วินาที อนุภาคนี้ จะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 11.9 เมตร **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 18/26

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 รถยนต์คันหนึ่ง เคลื่อนที่ขึ้นบนทางลาดชัน ด้วยอัตราเร็วดังแสดงในภาพ จงหาระยะทางที่รถยนต์คันนี้เคลื่อนที่ได้ ที่เวลา t = 60 s และจงแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งและเวลา (a – t Graph)

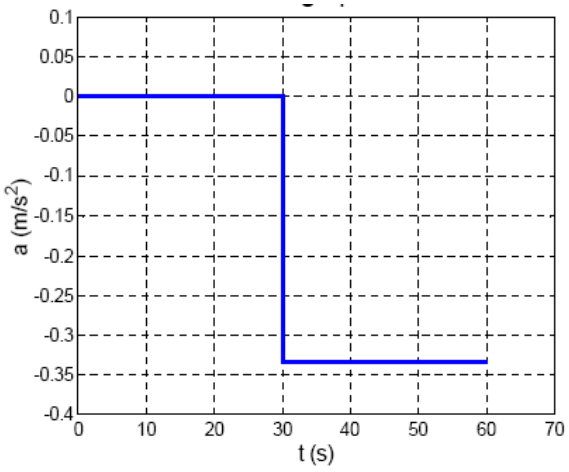
วิธีทำ



พื้นที่ใต้กราฟ v – t หมายถึง ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ ดังนั้น ที่เวลา t = 60 วินาที รถยนต์คันนี้จะเคลื่อนที่ได้ระยะทางทั้งหมดเท่ากับ

$$d = (10)(30) + \frac{1}{2}(10)(30) = 450 \text{ m.}$$

แสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่ง (a – t Graph)



ความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งและเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่

$0 \le t \le 30\,s$

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

หาความเร่งในช่วงเลา 30 - 60 วินาที

$30 \le t \le 60\,s$

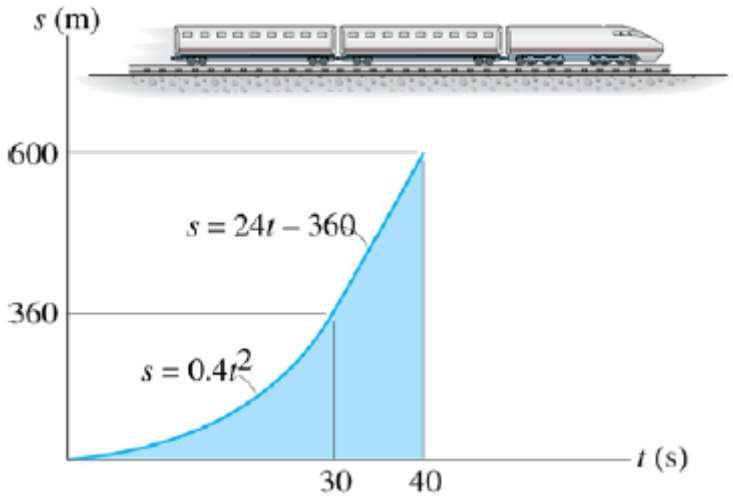
$$\frac{dv}{dt} = -\frac{10}{30} = -0.333 \text{ m/s}^2$$

ดังนั้น ที่เวลา t = 60 วินาที รถยนต์คันนี้จะเคลื่อนที่ได้ระยะทาง s = 450 m. และ ความเร่งในช่วงเวลา 0 – 30 วินาที เท่ากับ 0 m/s^2 เนื่องจากความเร็วในช่วงนี้ มีค่าคงที่ ส่วนในช่วงเวลา 30 – 60 วินาที รถยนต์คันนี้จะมีความหน่วงคงที่ a = -0.333 m/s^2 **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 19/26

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 6 รถไฟขบวนหนึ่ง มีการเคลื่อนที่ดังกราฟ s – t ดังแสดงในภาพ จงแสดงความสัมพันธ์กราฟ v – t และ a - t



วิธีทำ

ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่งของรถไฟขบวนนี้ ถูกแบ่งออกเป็น 2 ช่วงตามความสัมพันธ์ระหว่างกราฟ s – t คือ

- ในช่วง 0 - 30 วินาที ความสัมพันธ์ระหว่าง s – t คือ $s = 0.4t^2$
- ในช่วง 30 - 40 วินาที ความสัมพันธ์ระหว่าง s – t คือ $s = 24t - 360$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและความเร่งในแต่ละช่วงนั้น จะหาได้จาก

- ความเร็วช่วง $0 \le t \le 30s$

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.8t \ \ m/s.$$

- และความเร่ง

$$a = \frac{dv}{dt} = 0.8 \ m/s^2$$

- ความเร็วช่วง $30 \le t \le 40s$

$$v = \frac{ds}{dt} = 24 \ \ m/s.$$

และความเร่ง

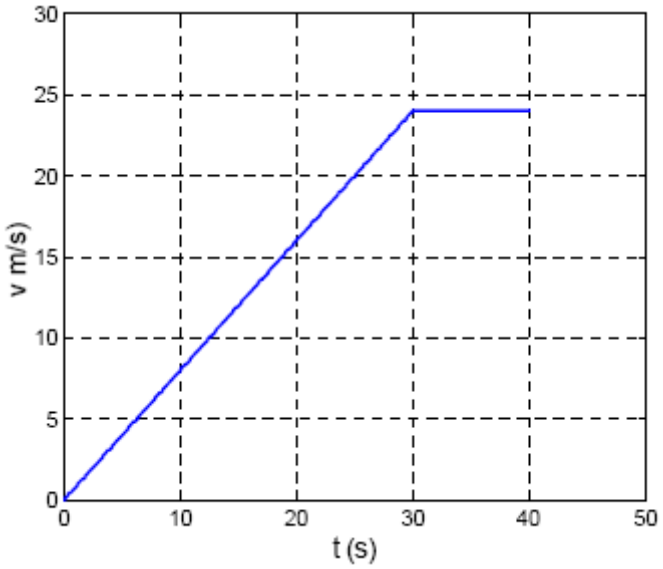
$$a = \frac{dv}{dt} = 0 \ m/s^2$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 20/16

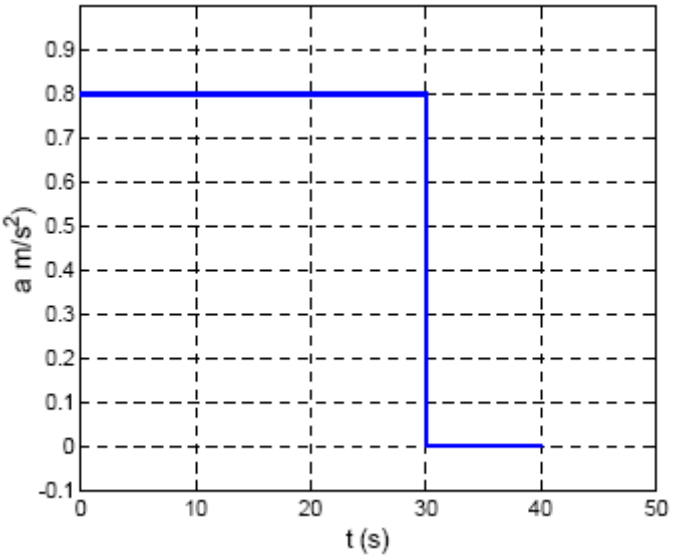
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 6 (ต่อ)

จากความสัมพันธ์ดังกล่าว จึงสามารถแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็วและเวลา (v – t Graph) และ ความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร่งและเวลา(a – t Graph) ได้ดังนี้



กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็วและเวลา (v – t Graph)

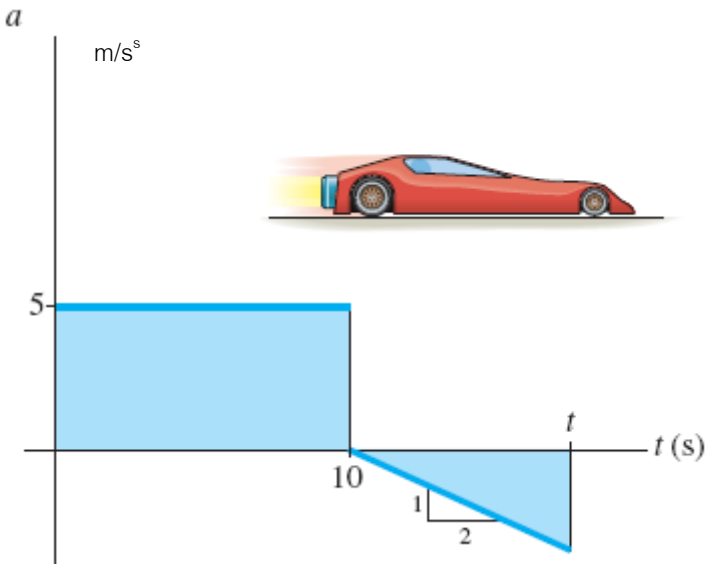


กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร่งและเวลา (a – t Graph)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 21/26

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 7 รถยนต์คันหนึ่งเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง โดยมีความสัมพันธ์ระหว่างความเร่งและเวลา (a – t Graph) ดังแสดงในภาพ จงหาอัตราเร็วสูงสุดที่รถยนต์คันนี้ (v_{max}) และ จงแสดงว่ารถยนต์คันนี้จะหยุดการเคลื่อนที่เมื่อเวลาใด (t_{stop})



วิธีทำ

พื้นที่ใต้กราฟ a – t หมายถึง ความเร็ว

ดังนั้น อัตราเร็วสูงสุด (v_{max}) ของรถยนต์คันนี้ คือ

$$v_{max} = (5)(10) = 50 \text{ m/s}$$

และสามารถหาเวลาที่รถยนต์คันนี้หยุดการเคลื่อนจาก

$$50 = \frac{1}{2}(t-10)\left(\frac{t-10}{2}\right) = \frac{1}{4}(t-10)^2$$

$$t = 10 + 2\sqrt{(50)}$$
$$= 24.12 \text{ s}$$

ดังนั้น เวลาที่รถยนต์คันนี้หยุดการเคลื่อนที่ คือ $t_{stop} = 24.12$ วินาที **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 2 เลขหน้า 22/26

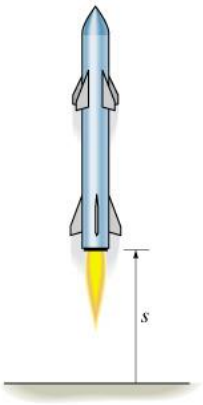
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 8

จรวดลำหนึ่งเคลื่อนที่ได้ตามสมการดังต่อไปนี้ คือ $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t - 10$ m.

จงหา

1) ความเร็วของจรวดลำนี้เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที
2) ความเร่งของจรวดลำนี้เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที
3) จงพล๊อตกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง s – t Graph และ v – t Graph



วิธีทำ

จากสมการระยะขจัด $s = 2t^3 + 3t^2 - 12t - 10$

และจาก $v = \frac{ds}{dt}$

ดังนั้นจะได้ $v = \frac{d(2t^3 + 3t^2 - 12t - 10)}{dt} = 6t^2 + 6t - 12$

แทนค่า t = 3 s ลงในสมการ จะได้ $v = 6(3^2) + 6(3) - 12 = 60$ m/s ##

หาอัตราเร่งของจรวดลำนี้เมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที

จาก $v = \frac{d(2t^3 + 3t^2 - 12t - 10)}{dt} = 6t^2 + 6t - 12$

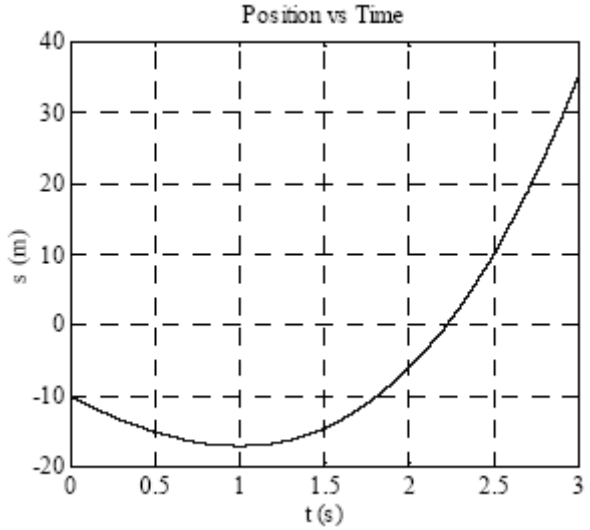
ดังนั้น $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(6t^2 + 6t - 12)}{dt} = 12t + 6$

แทนค่า t = 3 s ลงในสมการ จะได้ $a = 12(3) + 6 = 42$ m/s^2

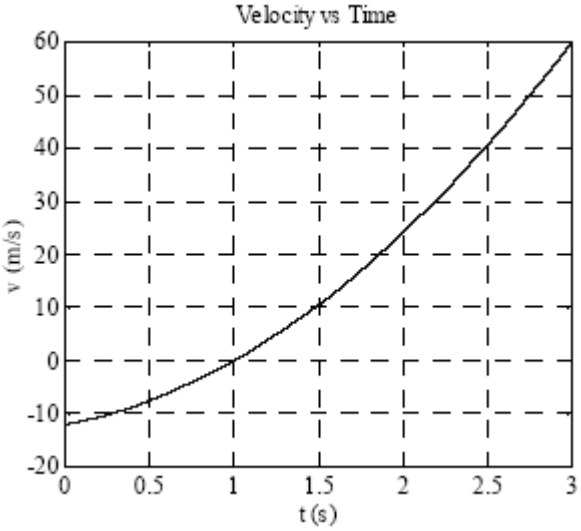
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 2 เลขหน้า 23/26

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 (ต่อ)



กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างระยะทางกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่



กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลา

นั่นคือเมื่อเวลาผ่านไป 3 วินาที จรวดลำนี้จะมีความเร็วเท่ากับ 60 m/s และมีอัตราเร่งเท่ากับ 42 m/s^2 **ตอบ**

ใบตรียมการสอน ครั้งที่ 2 เลขหน้า 24/26

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ด้วยสมการความเร็วดังต่อไปนี้ คือ $v = (8ti + 9t^2j)$ m/s จงหาการขจัดของอนุภาคนี้เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

ก) 4 m ข) 5 m. ค) 6 m. ง) 7 m.

ข้อที่ 2 : ถ้าที่เวลา $t = 0$ s. อนุภาคอันหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่งจุดอ้างอิง (Origin) จงหาระยะทางของอนุภาคนี้ เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาที ถ้าความเร็วของอนุภาคมีค่าคงที่เท่ากับ 2 m/s

ก) 3.5 m ข) 7 m. ค) 10.5 m. ง) 14 m.

ข้อที่ 3 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีความเร่งในแนวแกน y มีค่าคงที่ $a_y = 3m/s^2$ จงคำนวณหาความสูงที่อนุภาคนี้จะเคลื่อนที่ได้ เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที ($t = 0, v_y = 0$)

ก) 6 m ข) 12 m ค) 15 m ง) 18 m

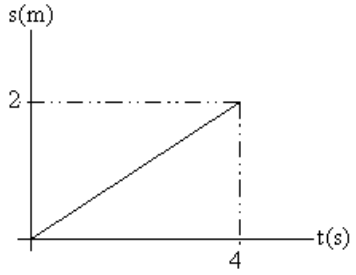
ข้อที่ 4 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร่งคงที่ $a = (2t)$ m/s^2 จงคำนวณหาความเร็วของอนุภาคเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที โดยกำหนดให้ ที่เวลา $t = 0$ s , อนุภาคนี้มีความเร็วเท่ากับ 2 m/s.

ก) 5 m/s ข) 10 m/s ค) 15 m/s ง) 15 m/s

ข้อที่ 5 ถ้า $s = (4t^2)$ m จงคำนวณหาความเร่งของอนุภาคเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

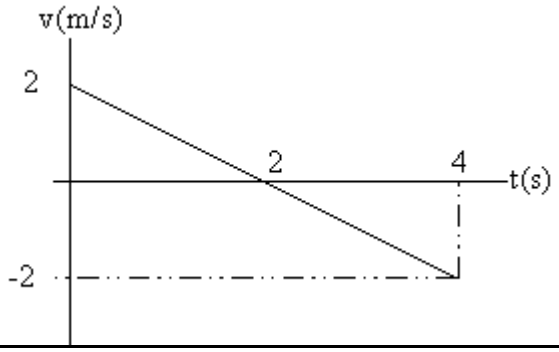
ก) 2 m/s^2 ข) 4 m/s^2 ค) 8 m/s^2 ง) 16 m/s^2

ข้อที่ 6 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ s – t จงหาความเร็วของอนุภาคนี้เมื่อ t = 1 s



ก) 0.5 m/s
ข) 1 m/s
ค) 1.5 m/s
ง) 2 m/s

ข้อที่ 7 อนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ v – t ที่กำหนดให้ จงหาตำแหน่งของอนุภาคนี้เมื่อ t = 4 s (s = 1m ที่ t = 0)

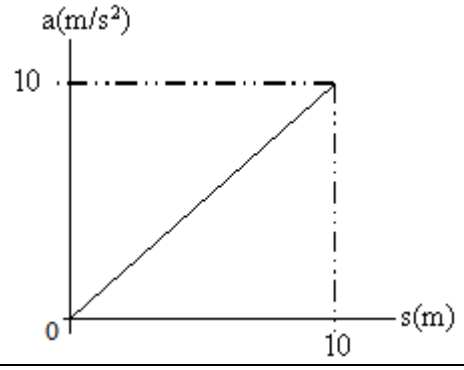


ก) 1 m
ข) 2 m
ค) 4 m
ง) 8 m

ใบตรียมการสอน ครั้งที่ 2 เลขหน้า 25/26

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 8 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ $a-s$ ที่กำหนดให้ จงหาอัตราเร็วของอนุภาคนี้เมื่อ $s=5$ m ($v=0$ ที่ $s=0$)



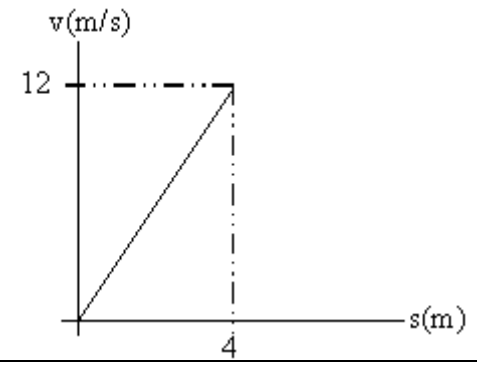
ก) 2.5 m/s

ข) 5 m/s

ค) 7.5 m/s

ง) 10 m/s

ข้อที่ 9 อนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ $v-s$ ที่กำหนดให้ จงหาอัตราเร่งของอนุภาคนี้เมื่อ $s=2$ m



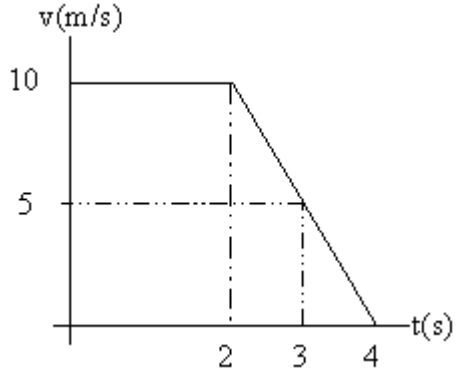
ก) 9 m/s^2

ข) 12 m/s^2

ค) 16 m/s^2

ง) 18 m/s^2

ข้อที่ 10 อนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ $v-t$ ที่กำหนดให้ จงหาอัตราเร่งของอนุภาคนี้เมื่อ $t=3$ s



ก) -2 m/s^2

ข) -3 m/s^2

ค) -4 m/s^2

ง) -5 m/s^2

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 22-23
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 12-18
- เอกสารหมายเลข 5 หน้าที่ 18-22
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 11-18
- เอกสารหมายเลข 9 หน้าที่ 18-23
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 10,12,30</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 2
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 2
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 2</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 3	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 2 จลนศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 1/19

ชื่อบทเรียน

2.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน

2.3 การเคลื่อนที่เชิงมุม

2.4 การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

จุดประสงค์การสอน

2.2 เข้าใจหลักการการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกันได้ถูกต้อง

2.2.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน

2.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน

2.2.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน

2.3 เข้าใจสมการการเคลื่อนที่เชิงมุมได้ถูกต้อง

2.3.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่เชิงมุม

2.3.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบเชิงมุม

2.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่เชิงมุมของอนุภาค

2.4 เข้าใจหลักการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ได้ถูกต้อง

2.4.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

2.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

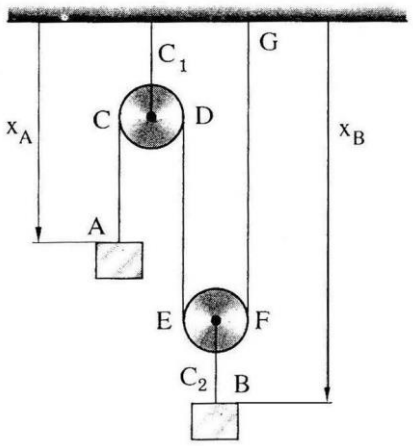
2.4.3 คำนวณการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 2/19

เนื้อหา

2.2 การเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน (Dependent Motion)

ในบางครั้งตำแหน่งของอนุภาคหนึ่งจะขึ้นอยู่กับตำแหน่งของอีกอนุภาคหนึ่งหรือหลายอนุภาค การเคลื่อนที่ของอนุภาคนี้ เราเรียกว่า การเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน ลักษณะที่พบเห็นกันโดยทั่วไป ได้แก่ ระบบรอกซึ่งประกอบด้วยมวลหลายๆ มวล เชื่อมโยงกันด้วยเส้นเชือก หลักที่ใช้ในการหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ระหว่างมวลในระบบ ก็คือ ความยาวเชือกมีค่าคงที่เสมอ



รูปที่ 2.14 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบขึ้นต่อกัน

ระบบรอกดังรูปที่ 2.14 ตำแหน่งของมวล A และ B จะขึ้นต่อกัน เนื่องจากความยาวของเส้นเชือกคือ ABDEFG ซึ่งมีความยาวคงที่เป็นตัวบังคับ

ระยะ $x_A = AC + C_1$

ระยะ $x_B = DE + C_1 + C_2 = FG + C_2$

$AC + CD + DE + EF + FG =$ ค่าคงที่

$(x_A - C_1) + CD + (x_B - C_1 - C_2) + EF + (x_B - C_2) =$ ค่าคงที่

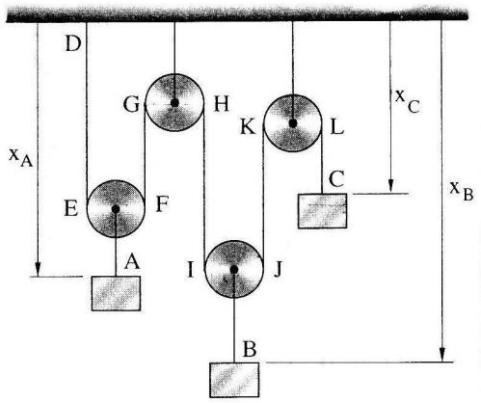
$x_A + 2x_B =$ ค่าคงที่

$v_A + 2v_B = 0$

$a_A + 2a_B = 0$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 3/19

เนื้อหา



รูปที่ 2.15 ระบบรอก

ระบบรอกดังรูปที่ 2.15 ตำแหน่งของมวล A , B และ C มีความสัมพันธ์ คือ

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{ค่าคงที่}$$

$$2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

ข้อสังเกต : สำหรับระบบรอกที่มีเชือกเส้นเดียว สัมประสิทธิ์หน้า X จะเป็น 1 ถ้าวัตถุนั้นอยู่ที่ปลายเชือกซึ่งคล้องอยู่กับรอกตาย และจะเป็น 2 เมื่อ วัตถุนั้นโยงติดอยู่กับจุดศูนย์กลางของรอกเป็น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 4/19

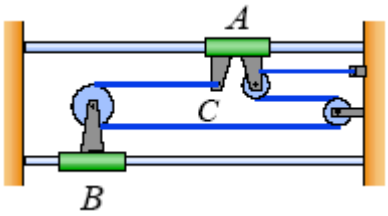
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 ปลอกเลื่อน B เคลื่อนที่ไปทางซ้ายด้วยความเร็ว 150 mm/s

จงหา ก) ความเร็วของปลอกเลื่อน A

ข) ความเร็วของจุด C

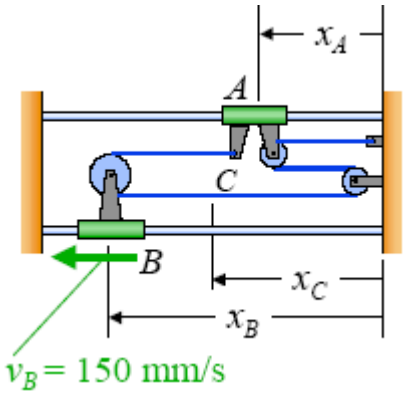
ค) ความเร็วสัมพัทธ์ของจุด C เมื่อเทียบกับความเร็วของปลอกเลื่อน B



(ก)

วิธีทำ

ก) หาความเร็วของปลอกเลื่อน A



(ข)

จากภาพ (ข) จะได้ความสัมพันธ์ของสายเคเบิ้ลดังนี้

$2X_A + X_B + (X_B - X_A) =$ คงที่ …(1)

$2V_A + V_B + (V_B - V_A) = 0$

$V_A + 2V_B = 0$

$V_A = -2V_B$ …(2)

แทนค่าลงในสมการที่ (2) จะได้

$V_A = -2(150 \text{ mm/s})$

$= -300 \text{ mm/s}$

$= 300 \text{ m/s} \rightarrow$ **ตอบ**

ข) หาความเร็วของจุด C จาก

$2X_A + X_C =$ คงที่

$2V_A + V_C = 0$

$V_C = -2V_A$

ดังนั้น $V_C = -2(-300) \text{ mm/s} = 600 \text{ mm/s} \leftarrow$ **ตอบ**

ค) หาความเร็วสัมพัทธ์ของจุด C เมื่อเทียบกับความเร็วของ V_B

จากสมการการสัมพัทธ์ $V_C = V_B + V_{C/B}$

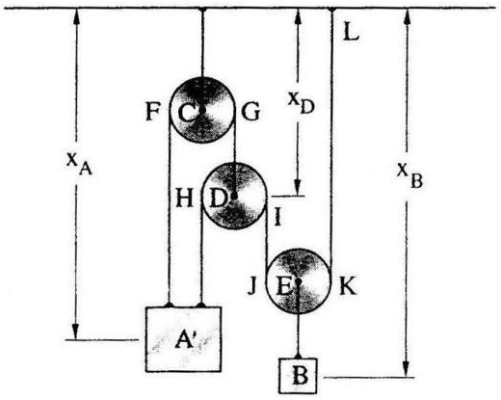
แทนค่า $600 = 150 + V_{C/B}$

ดังนั้น $V_{C/B} = 600 - 150 = 450 \text{ mm/s} \leftarrow$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 5/19

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 มวล B เคลื่อนที่ลงด้วยความเร็วคงที่เท่ากับ 1.8 m/s จงหา



ก) ความเร็วของมวล A

ข) ความเร็วของรอก D

<u>วิธีทำ</u>

เส้นเชือกที่คล้องบนรอกมี 2 เส้น และเชือกแต่ละเส้นมีความยาวคงที่

$$AF + GD = \text{คงที่}$$

$$X_A + X_D = K_1 \qquad (1)$$

และ $AH + IJ + KL = \text{คงที่} = k_2$

$$(X_A - X_D) + (X_B - X_D) + X_B = k_2$$

$$X_A + 2X_B - 2X_D = k_2 \qquad (2)$$

แทนค่า X_D จาก (1) ลงใน (2) ได้

$$X_A + 2X_B - 2(k_1 - X_A) = k_2$$

$$X_A + 2X_B - 2k_1 + 2X_A = k_2$$

$$3X_A + 2X_B = k \qquad (k = \text{คงที่})$$

$$3V_A + 2V_B = 0$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 6/19

เนื้อหา

ถ้า $V_B = 1.8$ m/s เคลื่อนที่ลง (ให้เป็น +)

ดังนั้นจะได้ $3V_A + 2(1.8) = 0$

$V_A = -1.2$m/s

ความเร็วของมวล A = 1.2 m/s เคลื่อนที่ขึ้น **ตอบ**

จากสมการ (1) จะได้

$V_A + V_D = 0$

$-1.2 + V_D = 0$

$V_D = 1.2$ m/s

ความเร็วของรอก D = 1.2 m/s เคลื่อนที่ลง **ตอบ**

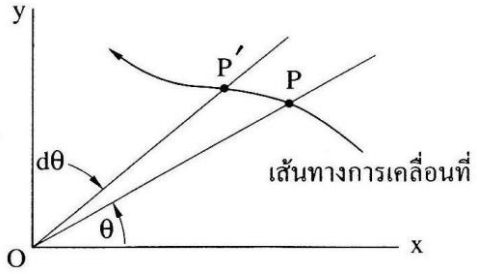
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 7/19

เนื้อหา

2.3 การเคลื่อนที่เชิงมุม (Angular Motion)

การเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้งในระนาบนั้น นอกจากเราจะบอกลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเชิงเส้น อันได้แก่ การขจัดเชิงเส้น (s) ความเร็วเชิงเส้น (v) และความเร่งเชิงเส้น (a) ของอนุภาคแล้ว เรายังสามารถบอกลักษณะการเคลื่อนที่เป็นแบบเชิงมุม คือ การขจัดเชิงมุม (θ) ความเร็วเชิงมุม (ω) และความเร่งเชิงมุม (α)

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระนาบ x - y ตำแหน่งของอนุภาคจะกำหนดได้ด้วยระยะ r และมุม θ (มุม θ นี้เรียกว่า การขจัดเชิงมุม เกิดจากเส้น OA ซึ่งลากผ่านอนุภาค p ทำมุมกับแนวอ้างอิง ox) เมื่อจุด p เคลื่อนที่มายังตำแหน่ง p′ ในช่วงเวลา dt การขจัดเชิงมุมเปลี่ยนแปลงไป $d\theta$ (ดังรูปที่ 2.16) ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมที่ลักษณะใด ๆ คือ



รูปที่ 2.16 การเคลื่อนที่เชิงมุม

จากรูปที่ 2.16 จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.7)$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (2.8)$$

และจากสมการที่ 2.7 และ 2.8 จะได้

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \qquad (2.9)$$

เมื่อ

θ คือ การขจัดเชิงมุม มีหน่วยเป็น rad , rev , deg

ω คือ ความเร็วเชิงมุม มีหน่วยเป็น rad/s , rev /s , deg /s

α คือ ความเร่งเชิงมุม มีหน่วยเป็น rad/s^2 , rev/s^2 , deg/s^2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 8/19

เนื้อหา

การกำหนดทิศทางของ θ โดยทั่วไป จะกำหนดให้วัดทวนเข็มนาฬิกา เป็นบวก และเวกเตอร์ $\vec{\omega}$ และ $\vec{\alpha}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบของการเคลื่อนที่ และมีทิศทางตามกฎมือขวา ดังเช่นในรูป เวกเตอร์ $\vec{\omega}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ และมีทิศพุ่งขึ้น ส่วนเวกเตอร์ $\vec{\alpha}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ เช่นกัน ในที่นี้ ทิศทางของ Unit Vector อยู่ในทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,k = \omega\,k$$

$$\vec{\alpha} = -\dot{\omega}\,k = -\alpha\,k$$

เมื่อ

k = Unit Vector ในแนวแกน z

ในกรณีที่อนุภาคมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ โดยเมื่อเวลา $t = 0, \theta = 0, \omega = \omega_1$ และที่เวลา $t = t, \theta = \theta, \omega = \omega$ เราจะได้สมการในรูปแบบเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น นั่นคือ

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 9/19

เนื้อหา

การกำหนดทิศทางของ θ โดยทั่วไป จะกำหนดให้วัดทวนเข็มนาฬิกา เป็นบวก และเวกเตอร์ $\vec{\omega}$ และ $\vec{\alpha}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบของการเคลื่อนที่ และมีทิศทางตามกฎมือขวา ดังเช่นในรูป เวกเตอร์ $\vec{\omega}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ และมีทิศพุ่งขึ้น ส่วนเวกเตอร์ $\vec{\alpha}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบ $x-y$ เช่นกัน ในที่นี้ ทิศทางของ Unit Vector อยู่ในทิศทางพุ่งขึ้น ดังนั้น

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\,k = \omega\,k$$

$$\vec{\alpha} = -\dot{\omega}\,k = -\alpha\,k$$

เมื่อ

k = Unit Vector ในแนวแกน z

ในกรณีที่อนุภาคมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่ โดยเมื่อเวลา $t = 0, \theta = 0, \omega = \omega_1$ และที่เวลา $t = t, \theta = \theta, \omega = \omega$ เราจะได้สมการในรูปแบบเช่นเดียวกับการเคลื่อนที่เชิงเส้น นั่นคือ

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \omega_0 + \alpha t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 10/19

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3

เส้นรัศมีบนเฟืองหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมตามสมการ $\omega = -200 + 8t^2$ เมื่อ ω มีหน่วยเป็น rev/s และ t มีหน่วยเป็น s จงหา

ก) มุม θ เป็น rad เมื่อเฟืองหมุนไปสิ้นสุดวินาทีที่ 3

ข) ความเร่งเชิงมุมของเส้นรัศมี ในขณะที่เฟืองมีความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์

วิธีทำ

จากความสัมพันธ์ของ ω กับ t ที่โจทย์กำหนดมาให้นั้น จะเห็นได้ว่าความเร็วเชิงมุมเริ่มต้นด้วยการหมุนตามเข็มนาฬิกา (เป็นลบ) และเมื่อเวลาผ่านไปความเร็วเชิงมุมจะช้าลงๆ จนกระทั่งหยุดแล้วจึงหมุนกลับทิศทาง

ก) พิจารณาเมื่อเฟืองหมุนไปในช่วงเวลา t = 2 ถึง 3 วินาที

ดังนั้น $\int_0^{\theta} d\theta = \int_2^3 \omega dt = \int_2^3 (-200 + 8t^2)\, dt$

$$\theta = \left(-200t + \frac{8}{3}t^3\right)\Big|_2^3$$

$$= -149.3 \text{ rev}$$

$$= -149.3\,(2\pi) = -938.3 \text{ rad}$$ **ตอบ**

ข) หาเวลาที่ความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์

$$-200 + 8t^2 = 0$$

$$t = 5 \text{ s}$$

จาก $\omega = -200 + 8t^2$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 16t$$

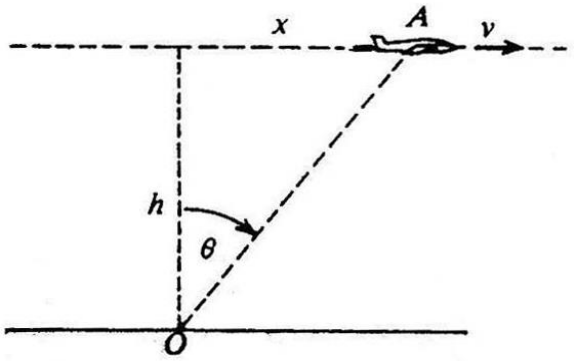
ความเร็วเชิงมุมเป็นศูนย์ที่เวลา t = 5 , จะได้ $\alpha = 16(5) = 80 \text{ rev/s}^2$

หรือ $= 80\,(2\pi) = 502.86 \text{ rad/s}^2$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 11/19

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4 เครื่องบิน A บินในแนวระดับด้วยความเร็วคงที่ v ที่ระดับความสูง h จงหาความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของแนว OAในขณะ θ ใดๆ



<u>วิธีทำ</u>

$\because \quad x = h\tan\theta$

$$v = \frac{dx}{dt} = h\dot{\theta}\sec^2\theta = h\omega\sec^2\theta$$

$$\omega = \frac{v}{h\sec^2\theta} = \frac{v}{h}\cos^2\theta \qquad \textbf{ตอบ}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = -\frac{v}{h}\theta\, 2\cos\theta\,\sin\theta$$

$$= -\frac{v}{h}\,\omega\sin 2\theta$$

$$= -\frac{v}{h}\,(\frac{v}{h}\cos^2\theta)\sin\,2\theta$$

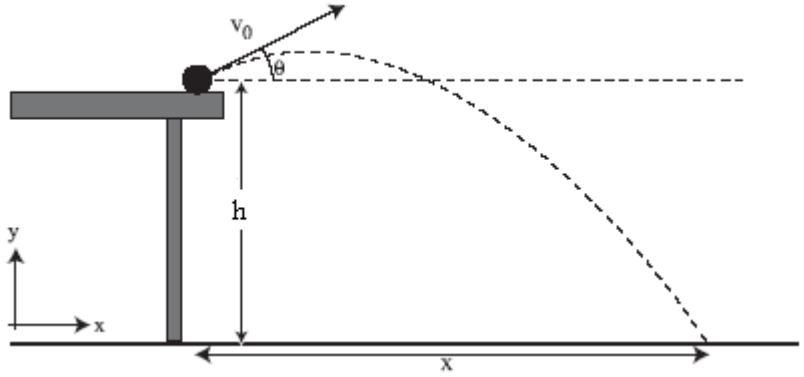
$$= -\frac{v^2}{h^2}\cos^2\theta\,\sin\,2\theta \qquad \textbf{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 12/19

เนื้อหา

2.4 การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ (Projectile Motion)

การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์เป็นการเคลื่อนที่ใน 2 มิติภายใต้ความเร่งที่มีค่าคงที่ ตัวอย่างเช่น การขว้างวัตถุใด ๆ ในแนวที่ทำมุมกับระนาบค่าใดค่าหนึ่ง จะพบว่าวัตถุนั้นจะมีการเคลื่อนที่เป็นแนวเส้นโค้งและจะตกลงพื้นเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ดังแสดงในรูปที่ 2.17



รูปที่ 2.17 แสดงการเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์ (Projectile Motion)

หลักในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบโปรเจกไตล์

ระยะขจัด และ เวลา	แกน x	$x = u_x t + \frac{1}{2}a_x t^2$	เมื่อ $a_x = 0$ $u_x = v_0 \cos\theta$
	แกน y	$h = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$	เมื่อ $a_y = -g$ โดย $g = 9.81\ m/s^2$ ในระบบ SI และ $g = 32.2\ ft/s^2$ ในระบบ U.S.

ความเร็ว และ ความเร่ง	แกน x	$v_x = u_x + a_x t =$ คงที่	เมื่อ $a_x = 0$ $u_x = v_0 \cos\theta$
	แกน y	$v_y^2 = u_y^2 + 2a_y h$	เมื่อ $u_y = v_0 \sin\theta$ $a_y = -g$ โดย $g = 9.81\ m/s^2$ ในระบบ SI และ $g = 32.2\ ft/s^2$ ในระบบ U.S.

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 13/19

เนื้อหา

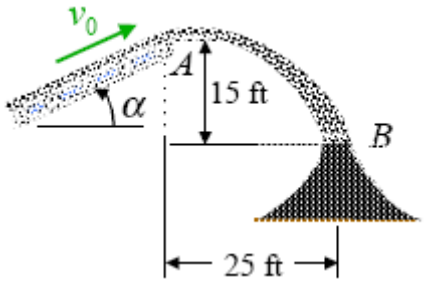
เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่	ในแนวแกน x $t = \frac{x}{u_x}$	เมื่อ $u_x = v_0 \cos\theta$
	ในแนวแกน y หาจากการแก้สมการ $h = u_y t + \frac{1}{2} a_y t^2$ โดยใช้สมการQuadratic formula โดยกล่าวว่า ถ้า $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	เมื่อ $u_y = v_0 \sin\theta$ $a_y = -g$ โดย $g = 9.81\ m/s^2$ ในระบบ SI และ $g = 32.2\ ft/s^2$ ในระบบ U.S.

หมายเหตุ : เวลาที่ใช้ในแนวแกน x และในแนวแกน y มีค่าเท่ากัน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 14/19

เนื้อหา

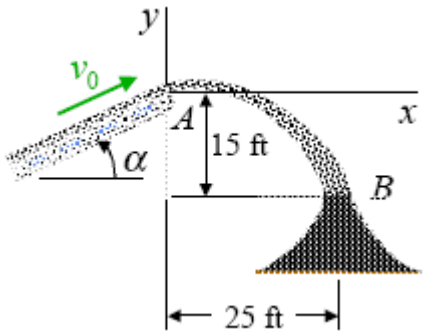
ตัวอย่างที่ 5 สายพานคอนเวนเยอร์ทำการลำเลียงทรายด้วยความเร็ว v_0 = 24 ft/s ดังแสดงในภาพ จงคำนวณหามุม α ถ้าต้องการให้ทรายลงที่ตำแหน่ง B พอดี



(ก)

วิธีทำ

แยกพิจารณาออกเป็น 2 แกน คือแกน x และแกน y



(ข)

พิจารณาในแนวแกน x

จากรูป (ข) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = x_0 + (v_x)_0 t$$

เมื่อ $x = -25$ ft

$x_0 = 0$

$(v_x)_0 = v_0 \cos\alpha = (24 \text{ ft/s}) \cos\alpha$

ดังนั้น

$$25 \text{ ft} = 0 + (24 \text{ ft/s}) \cos\alpha \qquad \ldots(1)$$

พิจารณาในแนวแกน y

$$y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad \ldots(2)$$

เมื่อ $y = -15$ ft , $y_0 = 0$

$(v_y)_0 = v_0 \sin\alpha = (24 \text{ ft/s}) \sin\alpha$

แทนค่าลงในสมการที่ (2) จะได้

$$(-15 \text{ ft}) = 0 + (24 \text{ ft/s}) \sin\alpha \, t - (1/2)(32.2 \text{ ft/s}^2) t^2 \qquad \ldots(3)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 15/19

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 (ต่อ)

แก้สมการที่ 2 และ 3 จะได้

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{25}{24t}\right)^2}$$

$$-15 = 24t\sqrt{1 - \left(\frac{25}{24t}\right)^2} - 16.1t^2$$

$$250.21\, t^4 - 1{,}059\, t^2 + 850 = 0$$

ดังนั้น $t = 1.048$ s และ $\alpha = 6.09^0$

$t = 1.729$ s และ $\alpha = 52.9^0$

นั่นหมายความว่าถ้าต้องการให้ทรายตกลงที่จุด B พอดีมุม α จะเท่ากับ 6.09^0 หรือ เท่ากับ 52.9^0

ตอบ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 16/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยการแสดงวิธีทำ

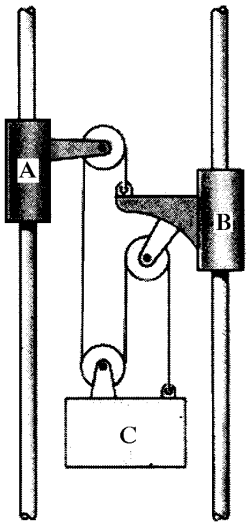
ข้อที่ 1 : ปลอกเลื่อน A เริ่มเคลื่อนที่ลงจากตำแหน่งสูงสุด (t = 0) ด้วยความเร่งคงที่ 3.6 in/s^2 และปลอกเลื่อน B เคลื่อนที่ลงด้วยความเร็วคงที่ 17 in/s

จงหา ก) เวลาที่ทำให้ความเร็วของกล่อง C มีค่าเป็น 0

ตอบ. $t = 2.22\ s$

ข) ตำแหน่งและทิศทางการเคลื่อนที่ของกล่อง C

ตอบ. กล่อง C เคลื่อนที่ลงได้ระยะทางเท่ากับ 5.93 in.



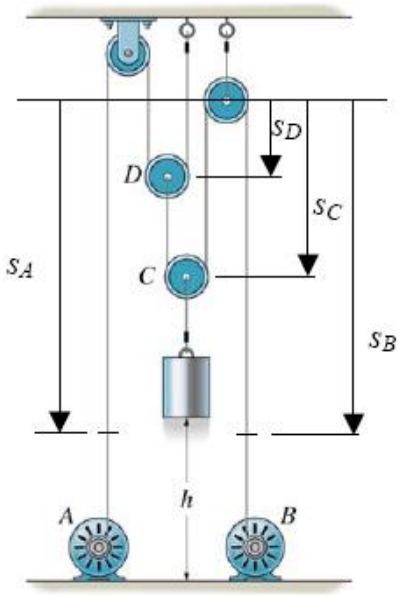
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 3 เลขหน้า 17/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. จงคำนวณหาเวลาและความเร็วของวัตถุที่ห้อยติดกับรอก C เมื่อวัตถุนั้นเคลื่อนที่ขึ้นสูงจากพื้นได้ระยะความสูง $h = 4\,m$ ถ้าความเร่งของสายเคเบิ้ลทั้งสองด้าน เท่ากับ $a = (0.2t)\ m/s^2$

ตอบ. $t = 5.4288\ s$, $v = 2.2104\ m/s \uparrow$



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

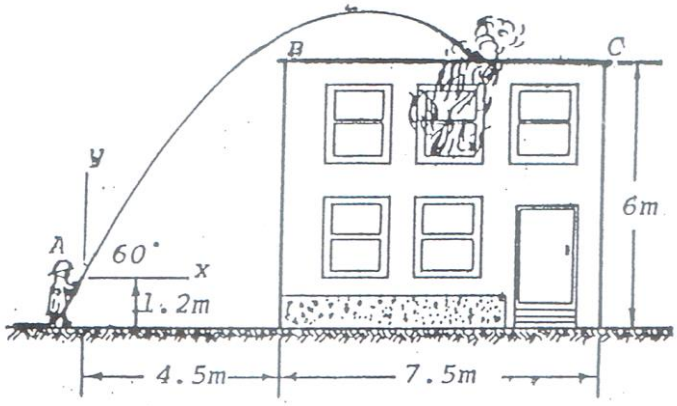
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 18/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ความเร็วของน้ำที่ฉีดออกจากหัวฉีดที่จุด A มีค่าเท่ากับ 1.2 m/s ทำมุม 60^o กับแนวราบ จงหาตำแหน่งที่ลำน้ำกระทบหลังคา ให้ตรวจสอบด้วยว่า ลำน้ำนี้พ้นขอบหลังคา B หรือไม่ และจงหาความเร็วที่น้อยที่สุดและความเร็วที่มากที่สุด ที่ทำให้ลำน้ำนี้กระทบหลังคา

ตอบ. - ลำน้ำนี้จะกระทบหลังคาโดยมีระยะห่างจากจุด $B = 4.15$ m

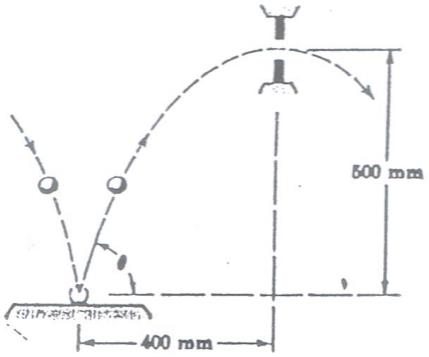
- ความเร็วที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ลำน้ำนี้กระทบหลังคา $v_{min} = 11.54$ m/s
- ความเร็วที่มากที่สุด ที่ทำให้ลำน้ำนี้กระทบหลังคา $v_{max} = 13.26$ m/s



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

ข้อที่ 4. ลูกบอลกระทบพื้นและกระดอนขึ้นผ่านช่องเปิดตามรูป จงหาค่ามุม θ และความเร็วของลูกบอลใน ในขณะที่ผ่านช่องเปิดดังกล่าว

ตอบ. $\theta = 68.2^o$, $v = 1.25$ m/s



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 4

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 1 หน้าที่ 23-24
- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 45,49-51
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 24-28
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 46
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 30-33,40-43</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 3
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 3
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 3</td></tr>
<tr><td>โสตทัศนวัสดุ</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน โดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 4	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 2 จลนศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 4 หน้าที่ 1/20

ชื่อบทเรียน

2.5 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ

จุดประสงค์การสอน

2.5 เข้าใจการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบได้ถูกต้อง

2.5.1 อธิบายลักษณะของการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ

2.5.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ x - y

2.5.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ n - t

2.5.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ r - θ

2.5.5 คำนวณการเคลื่อนของอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 2/20

เนื้อหา

2.5 การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ (Plane Curvilinear Motion)

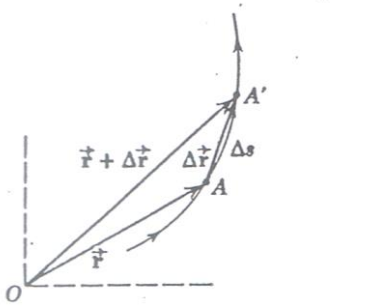
จากรูปเมื่อพิจารณาอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ ตำแหน่งของอนุภาคที่ A กำหนดได้ด้วยเวกเตอร์ $\vec{r}$ ซึ่งลากจากจุดคงที่จุดหนึ่ง บนระนาบไปยังอนุภาค เราเรียกเวกเตอร์นี้ว่า เวกเตอร์ทางตำแหน่ง (Position Vector) หลังจากเวลาผ่านไป Δt อนุภาคเคลื่อนที่มาอยู่ที่ตำแหน่ง A′ มีเวกเตอร์ทางตำแหน่งเป็น $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ การขจัดของอนุภาคในช่วงเวลา Δt นี้คือ $\Delta\vec{r}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์ที่แสดงการเปลี่ยนตำแหน่งของอนุภาค ส่วนระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ในช่วงเวลา Δt คือ Δs ซึ่งเป็นปริมาณสเกลาร์ วัดตามแนวการเคลื่อนที่ของอนุภาค

ความเร็วเฉลี่ยในการเคลื่อนที่จาก A ไปยัง A′ คือ $\vec{v}_{av} = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

อัตราเร็วเฉลี่ยในการเคลื่อนที่จาก A ไปยัง A′ คือ $v_{av} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

ในช่วงเวลา Δt สั้น ๆ ตำแหน่ง A และ A′ จะอยู่ใกล้กัน ขนาดของ $\vec{v}_{av}$ และ v_{av} จะเท่ากัน

เส้นทางเคลื่อนของอนุภาค



ความเร็วที่ขณะใดขณะหนึ่ง

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

v จะอยู่ในแนวสัมผัสกับทางเดินของอนุภาค ณ. จุดนั้น

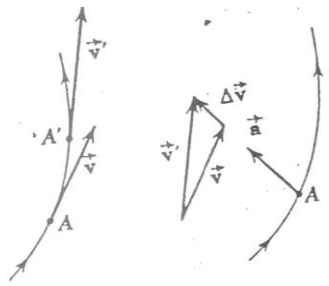
ในที่นี้ให้สังเกตค่า $\left|\dot{\vec{r}}\right|$ คือ Magnitude of Derivative โดย $\left|\dot{\vec{r}}\right| = \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \dot{s} = |\vec{v}| = v$

ซึ่งคือขนาดของความเร็ว ส่วน $\dot{r}$ คือ Derivative of magnitude โดย $\dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d|r|}{dt}$ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงความยาวของเวกเตอร์ $\vec{r}$

ความเร่งที่ขณะใดขณะหนึ่ง

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$



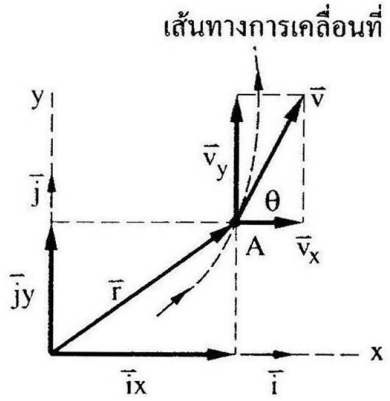
$\vec{a}$ จะมีทิศทางเดียวกับ $\Delta\vec{v}$ ของอนุภาค ณ. จุดนั้น

ในที่นี้ให้สังเกตว่า ความเร่ง $\vec{a}$ นี้จะเกิดเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงทิศทางของ $\vec{v}$ และ/หรือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{v}$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 3/20

เนื้อหา

1. การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ x – y



อนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ X-Y จะได้ความสัมพันธ์ต่าง ๆ ดังนี้

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

เมื่อ

$\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่ง

$\vec{v}$ คือความเร็ว

$\vec{a}$ คือความเร่ง

ขนาดของ $\vec{v}$ หาได้ดังนี้

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad (1)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_y}{a_x} \qquad (2)$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 4/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 เวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ x - y คือ $\vec{r} = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i} + \frac{t4}{12}\vec{j}$ เมื่อ $\vec{i}$ มีหน่วยเป็น m และ t มีหน่วยเป็น s จงหาค่า $\vec{v}$ และ $\vec{a}$ ที่เวลา $t = 3$ s

<u>วิธีทำ</u>

จาก $\vec{r} = \left(\frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{i} + \frac{t4}{12}\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(2t^2 - 3t\right)\vec{i} + \frac{t^3}{3}\vec{j} \quad (1)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(4t - 3\right)\vec{i} + t^2\vec{j} \quad (2)$$

ที่เวลา $t = 3$ s แทนค่าในสมการ (1) และ (2) ได้

$$v = \left(2\left(3^2\right)\right) - 3(3)\vec{i} + \frac{3^3}{3}\vec{j}$$

$v = 9\vec{i} + 9\vec{j}$ m/s **ตอบ**

$a = \left(4(3) - 3\right)\vec{i} + \left(3^2\right)\vec{j}$

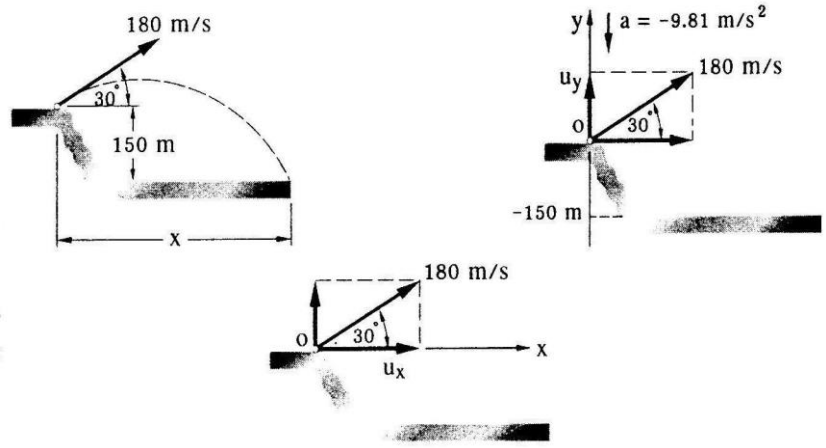
$= 9\vec{i} + 9\vec{j}$ m/s^2 **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 2

ยิงลูกปืนจากขอบของหน้าผาซึ่งสูง 150 m ด้วยความเร็วต้น 180 m/s ทำมุม 30° กับแนวระดับ ถ้าไม่คิดแรงต้านอากาศ จงหา

ก) ระยะทางในแนวระดับที่ลูกปืนตกกระทบพื้นล่าง

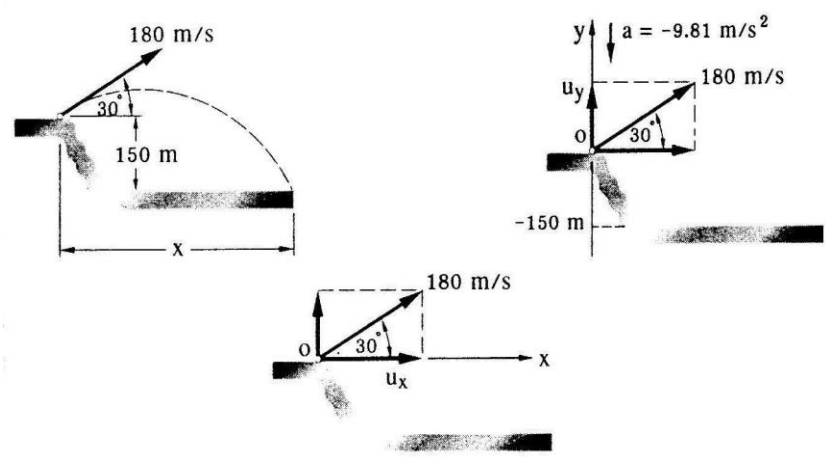
ข) ระดับความสูงที่สูงที่สุดจากพื้นล่างของการเคลื่อนที่แบบวิถีโค้งของลูกปืน



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 5/20

เนื้อหา

วิธีทำ



$u_y = u\sin\theta = 180\sin 30^\circ = 90$ m/s

$a_y = g = -9.81$ m/s^2

$u_X = u\cos\theta = 180\cos 30^\circ = 155.9$ m/s

$a_X = 0$

เมื่ออนุภาคตกถึงพื้น ระยะ $y = -150$ m เมื่อเทียบกับจุดเริ่มต้น

จาก $y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$

$-150 = 90t - \frac{1}{2}(9.81)t^2$

$t^2 - 18.73t - 30.6 = 0$

$t = 19.91$ s

ก)ระยะทางในแนวระดับที่ลูกปืนเคลื่อนที่ได้

จาก $x = u_X t = ut\cos\theta$

$= 155.9\ (19.91) = 3104$ m **ตอบ**

ข) ระดับสูงสุดเกิดขึ้นเมื่อ v_y เป็นศูนย์

$v_y^2 = (u\sin\theta)^2 - 2gy$

$0 = (90^2) - 2\ (9.81)\ y$

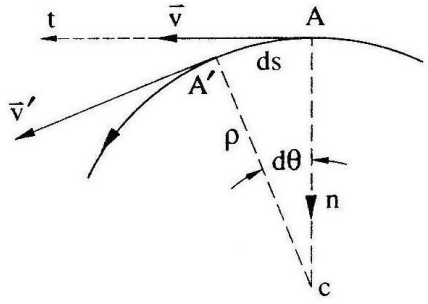
$y = 413$ m

ระดับความสูงที่สุด $= 413 + 150 = 563$ m **ตอบ**

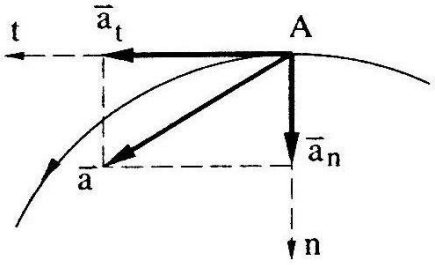
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 6/20

เนื้อหา

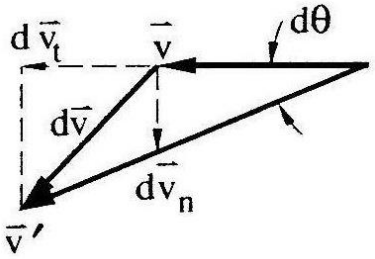
2. การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบ n - t



(ก)



(ข)



(ค)

เนื่องจากอนุภาคเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบตั้งแต่ n และ t โดยให้แกน n ตั้งฉากกับเส้นทางการเคลื่อนที่ และแกน t สัมผัสกับเส้นทางการเคลื่อนที่ ตามรูป (ก)

จาก $ds = \rho d\theta$

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho\dot{\theta} = \rho\omega$$

ความเร็ว v คือความเร็วในแนว t

$$v = v_t = \rho\omega \qquad (1)$$

สำหรับ v ในแนว n ในขณะใดๆ นั้นเป็นศูนย์

$$v_n = 0 \qquad (2)$$

จากรูป (ข) จะได้

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

$$\therefore \quad a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} \qquad (3)$$

ขนาดของ a_n และ a_t หาได้ดังนี้ ตามรูป (ค)

$$a_n = \left|\frac{d\vec{v}_n}{dt}\right| = v\frac{d\theta}{dt} = v\dot{\theta} = \rho\dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_n = v\omega = \rho\omega^2 = \frac{v^2}{\rho} \qquad (4)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 7/20

เนื้อหา

เมื่อ ρ คือรัศมีความโค้งของเส้นทางการเคลื่อนที่ตรงจุดที่พิจารณา

$$a_t = \left|\frac{d\bar{v}_t}{dt}\right| = \dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\rho\omega)}{dt}$$

$$= \rho\omega + \dot{\rho}\omega = \rho\alpha + \dot{\rho}\omega$$

$$a_t = \rho\alpha + \dot{\rho}\omega \qquad (5)$$

ถ้าค่า ρ มีค่าคงที่ จะได้ $\rho = 0$ ดังนั้นจะได้ว่า $a_t = \rho\alpha$ (6)

เมื่อ

ρ คือ รัศมีความโค้งที่ตำแหน่งพิจารณา

a_n คือ ความเร่งในแนว n

a_t คือ ความเร่งในแนว t

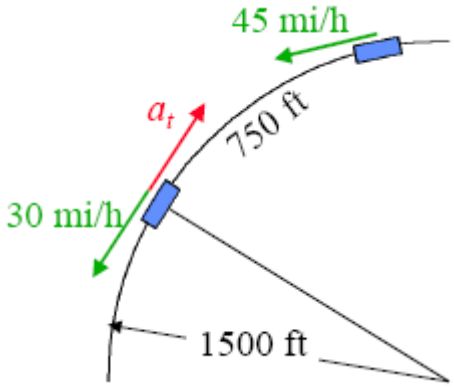
v คือ ความเร็วในแนวสัมผัสหรือในแนว t

$\dot{\theta}$ คือ ความเร็วเชิงมุม

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 8/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 รถยนต์คันหนึ่งวิ่งเข้าทางโค้งที่มีรัศมีความโค้งเท่ากับ 1,500 ft ด้วยความเร็วดวยอัตราเร็ว 45 mi/h (ที่ตำแหน่ง A) หลังจากนั้นทำการเหยียบคันเบรกทำให้อัตราเร็วลดลงเหลือ 30 mi/h (ที่ตำแหน่ง B) โดยวัดระยะทางจากตำแหน่ง A ถึงตำแหน่ง B จงหาอัตราเร่งของรถยนต์คันนี้หลังจากที่ทำการเหยียบคันเบรกได้ระยะทางเท่ากับ 500 ft



(ก)

$\Rightarrow 30$ mi/h = 44 ft/s

$\Rightarrow 45$ mi/h = 66 ft/s

วิธีทำ ความเร่งของรถยนต์คันนี้หาได้จาก

$$a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_t)^2} \qquad \ldots(1)$$

เมื่อ $$a_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \ldots(2)$$

หาความเร่งในแนวแกน t จาก

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = a_t \int_{x_0}^{x} dx \qquad \ldots(3)$$

แทนค่า $$\int_{66}^{44} v\,dv = a_t \int_{0}^{750} dx$$

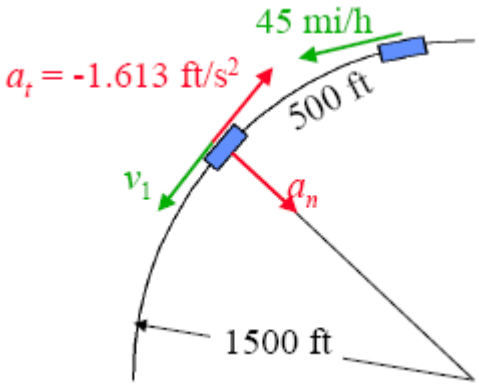
$$\frac{1}{2}(44^2 - 66^2) = a_t(750-0) \quad \text{ดังนั้น} \quad a_t = -1.613 \text{ ft/s}^2$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 9/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 (ต่อ)

พิจารณาตำแหน่งของรถยนต์คันนี้ที่ระยะทาง 500 ft



(ข)

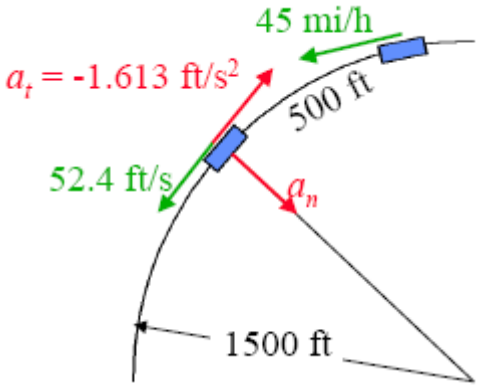
จาก $\int_{v_0}^{v} v\,dv = a_t \int_{x_0}^{x} dx$

แทนค่า $\int_{66}^{v_1} v\,dv = -1.63 \int_{0}^{500} dx$

$$\frac{1}{2}(v_1^2 - 66^2) = -1.63(500 - 0)$$

ดังนั้น $V_1 = 52.4$ ft/s

หาความเร่งของรถยนต์คันนี่ที่ระยะทาง 500 ft หลังจากทำการเหยียบคันเบรก



(ค)

$$a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_t)^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(52.4 \text{ ft/s})^2}{1500 \text{ ft}} = 1.828 \text{ ft/s}^2$$

ดังนั้น

$$a = \sqrt{(-1.613)^2 + (1.828)^2}$$

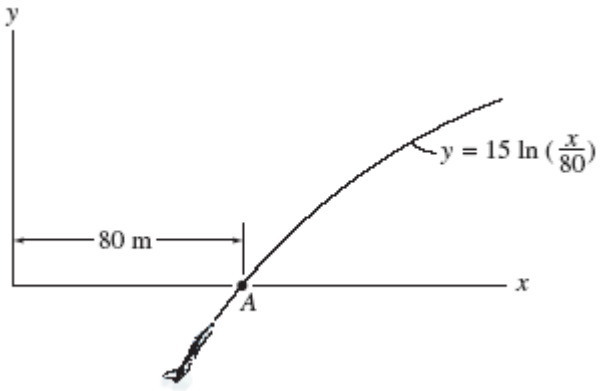
$$= 2.44 \text{ ft/s}^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 10/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4

เครื่องบินเจทลำหนึ่งมี เคลื่อนที่ตามสมการ $y = 15\ln\left(\frac{x}{80}\right)$ ด้วยอัตราเร็วคงที่เท่ากับ 110 m/s จง หาขนาดของอัตราเร่ง ของเครื่องบินลำนี้ โดยกำหนดให้ $y_A = 0$ (ที่จุด A)



วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่ในแนวแกน $y = 15\ln\left(\frac{x}{80}\right)$

ดังนั้นความเร็วในแนวแกน y จึงเท่ากับ

$\frac{dy}{dx} = 15\left[\frac{1/80}{x/80}\right] = \frac{15}{x}$ ดังนั้นที่ x = 80 m. $\frac{dy}{dx} = \frac{15}{80} = 0.1875$

และ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{15}{x^2}$ ดังนั้นที่ x = 80 m. $\frac{d^2y}{dx^2} = -0.002344$

และจากสมการ

$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$ แทนค่าลงในสมการจะได้ $\rho = \frac{\left[1+(1.875)^2\right]^{3/2}}{|-0.002344|} = 449.3633$ m.

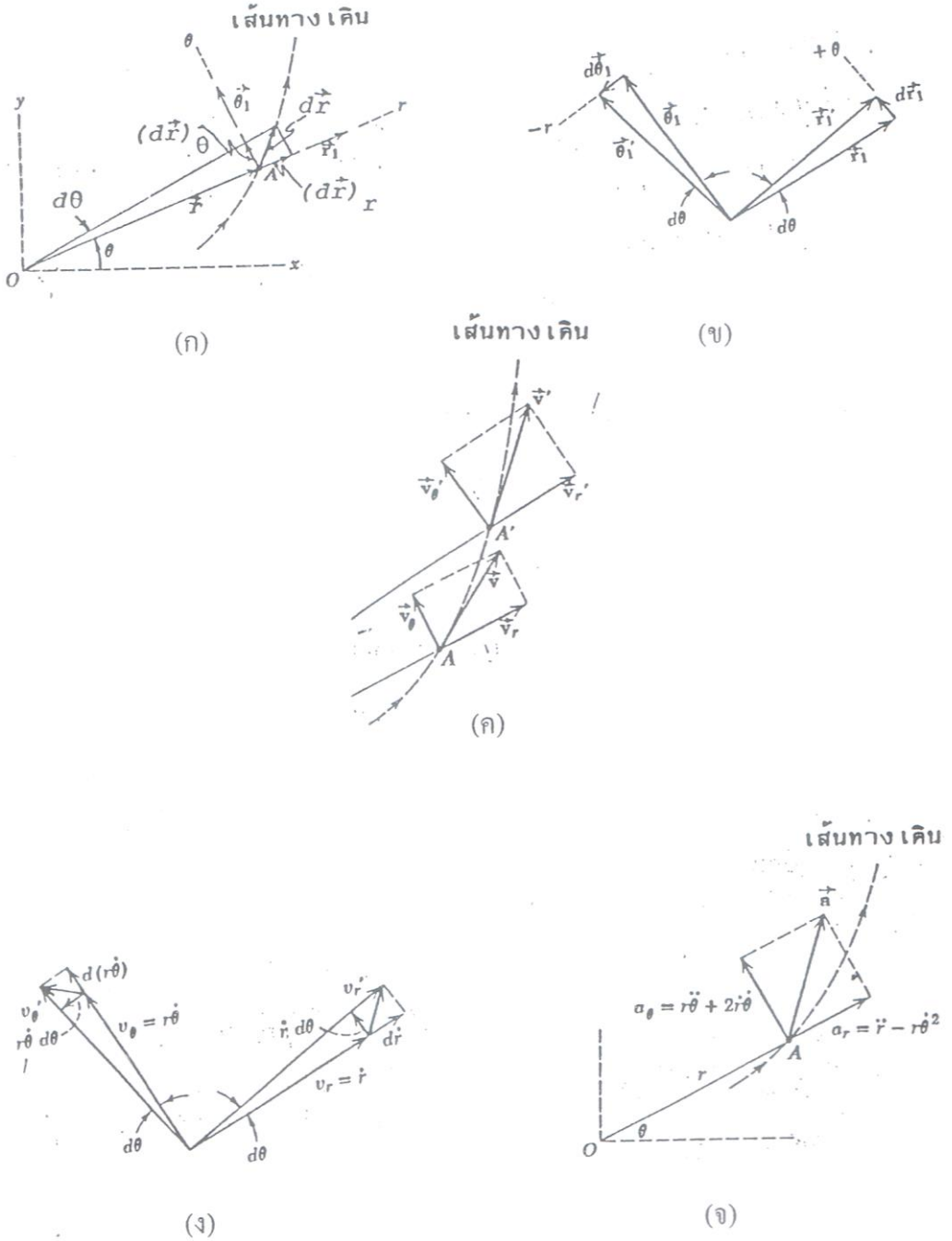
ดังนั้น $a = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(110)^2}{449.3633} = 26.972$ m/s^2

นั่นหมายความว่าอัตราเร่งของเครื่องบินเจทลำนี้ เท่ากับ 26.972 m/s^2 **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 11/20

เนื้อหา

4. การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบแบบ $r-\theta$



รูปที่ 2.18 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งของอนุภาคแบบ $r-\theta$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 12/20

เนื้อหา

จากรูปที่ 2.18 (ก) ตำแหน่งของอนุภาคที่จุด A กำหนดได้ด้วยระยะในแนวรัศมี r ซึ่งวัดจากจุดคงที่ O และมุม θ แกน r-θ จะถูกกำหนดให้มีจุด Origin อยู่ที่อนุภาคและเคลื่อนที่ไปพร้อมกับอนุภาค แกน r จะอยู่ในแนวเดียวกับระยะ r และมีทิศทาง +r พุ่งออก จากจุดคงที่ O ส่วนแกน θ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับแกน r

Polar Coordinates นี้ เหมาะสำหรับการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบบังคับ ซึ่งถูกควบคุมด้วยระยะรัศมีและตำแหน่งเชิงมุม หรือการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบไม่บังคับ ซึ่งถูกสังเกตการเคลื่อนที่ โดยวัดระยะรัศมีและตำแหน่งเชิงมุม
ในการหาความเร็วและความเร่งของอนุภาคนั้นทำได้ดังนี้

อนุภาคที่ตำแหน่ง A มีเวกเตอร์ทางตำแหน่งเป็น $\vec{r}$ และเมื่อเคลื่อนที่มายังตำแหน่ง A′ ในช่วงเวลา dt จะได้การขจัด $d\vec{r}$ โดย

$$d\vec{r} = d\vec{r}_r + d\vec{r}_\theta$$

หารตลอดด้วย dt จะได้

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta \qquad ...(2.20)$$

$\vec{v}_r$ มีทิศทางในแนว $\vec{r}$ มีขนาดคือ $\frac{dr}{dt}r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}$

($d\vec{r}_r$ คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{r}$ ในแนวแกน r ซึ่งก็คือ การเปลี่ยนแปลงของเวกเตอร์ $\vec{r}$ นั่นเอง)

$\vec{v}_\theta$ มีทิศทางในแนว θ มีขนาดคือ $r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta}$

($d\vec{r}_\theta$ คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{r}$ ในแนวแกน θ ซึ่งตามรูป 2.18 (ก) จะมีขนาดเท่ากับ $r\,d\theta$)

$$\vec{v}_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad \text{และ} \quad \vec{v}_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = r\dot{\theta} \qquad ...(2.21)$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 13/20

เนื้อหา

จากรูปที่ 2.18 (ค) เมื่ออนุภาค A เคลื่อนที่ไปยัง A′ ความเร็วย่อยของอนุภาค คือ v_r และ v_θ จะเปลี่ยนไปเป็น v_r' และ v_θ' ตามลำดับ จะเห็นได้ว่า การเปลี่ยนแปลงของความเร็วย่อยนั้นจะมีการเปลี่ยนแปลงทั้งขนาดและทิศทาง เมื่อนำมาเขียนดังรูปที่ 2.18 (ง) ความเร็วที่เปลี่ยนแปลงไปคือ $d\vec{v}_r$ และ $d\vec{v}_\theta$ ซึ่งเราสามารถแตกให้อยู่ในแนวแกน $r-\theta$ คือ $d\vec{v}_r$ แตกได้เป็น $(d\vec{v}_r)_r$ และ $(d\vec{v}_r)_\theta$ ส่วน $d\vec{v}_\theta$ แตกได้เป็น $(d\vec{v}_\theta)_r$ และ $(d\vec{v}_\theta)_\theta$

ขนาดของความเร็วที่เปลี่ยนแปลง หาได้ดังนี้

$(d\vec{v}_r)_r = dv_r = d\dot{r}$ ทิศ $+r$ (คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{v}_r$)

$(d\vec{v}_r)_\theta = v_r d\theta = \dot{r}\,d\theta$ ทิศ $+\theta$ (คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{v}_r$)

$(d\vec{v}_\theta)_r = v_\theta\, d\theta = r\dot{\theta}\,d\theta$ ทิศ $-r$ (คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{v}_\theta$)

$(d\vec{v}_\theta)_\theta = dv_\theta = d(r\dot{\theta})$ ทิศ $+\theta$ (คือ การเปลี่ยนแปลงขนาดของ $\vec{v}_\theta$)

เมื่อรวมการเปลี่ยนแปลงในแต่ละแนวย่อย r และ θ แล้วหารด้วยช่วงเวลา dt จะได้ความเร่งในแต่ละแนวย่อยดังนี้

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta \qquad ...(2.22)$$

$$\vec{a}_r = \frac{d\dot{r}}{dt} - \frac{r\dot{\theta}\,d\theta}{dt} = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$

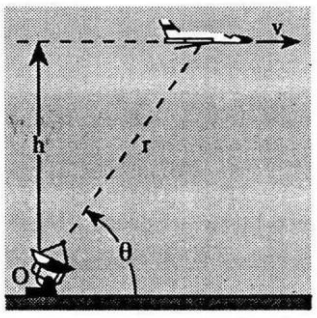
$$\vec{a}_\theta = \frac{\dot{r}\,d\theta}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} = r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}$$

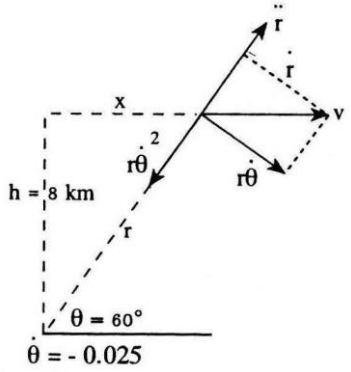
นั่นคือ $\vec{a}_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ และ $\vec{a}_\theta = r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}$ ...(2.23)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 14/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 เครื่องบินไอพ่นบินด้วยความเร็ว v คงที่ ที่ระดับความสูง h = 8 km ถูกจับด้วยเรดาร์ ซึ่งติดตั้งที่จุด O ใต้แนวเส้นทางบิน ถ้ามุม θ ลดลงด้วยอัตรา 0.025 rad/s เมื่อมุม $\theta = 60^\circ$ จงหาค่า $\ddot{r}$ ในขณะนั้นและขนาดของความเร็วของเครื่องบิน





วิธีทำ

ความเร่งในทุกทิศทางเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$a = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0$$

$$\therefore \quad \ddot{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$r = \frac{h}{\sin\theta} = \frac{8}{\sin 60^\circ} = 9.24 \text{ km}$$

มุม θ ลดลงด้วยอัตรา = 0.025 rad/s

$$\dot{\theta} = -0.025 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 9.24\,(-0.025)^2 = 0.00577 \text{ km/s}^2$$

$$= 5.77 \text{ m/s}^2 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$v = \left|\frac{r\dot{\theta}}{\sin\theta}\right| = \left|\frac{h\dot{\theta}}{\sin^2\theta}\right|$$

$$\therefore \quad v = \frac{8000(0.025)}{(\sqrt{3}/2)^2} = 267 \text{ m/s}$$

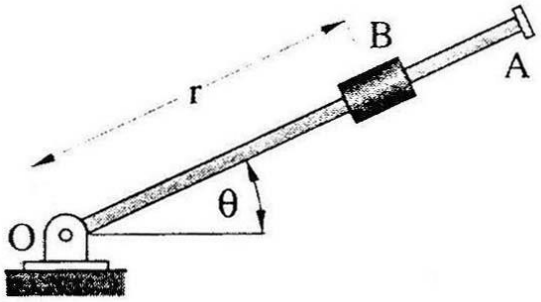
$$= 960 \text{ km/h} \quad \textbf{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 15/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 6

แขน OA ซึ่งยาว 0.9 m หมุนรอบจุด O ด้วยความสัมพันธ์ $\theta = 0.15\,t^2$ ปลอก Bเลื่อนไปตามแขน OA ด้วยความสัมพันธ์ $r = 0.9 - 0.12\,t^2$ ในขณะที่แขน OA ทำมุม $\theta = 30^\circ$ จงหา



ก) ความเร็วรวมของปลอก B

ข) ความเร่งรวมของปลอก B

<u>วิธีทำ</u>

จากความสัมพันธ์ $\theta = 0.15\,t^2$ และ $r = 0.9 - 0.12\,t^2$ (1)

$\therefore \quad \dot{\theta} = 0.3t$ และ $\dot{r} = -0.24t$ (2)

$\ddot{\theta} = 0.3$ และ $\ddot{r} = -0.24$ (3)

หาเวลา t เมื่อ $\theta = 30^\circ = \dfrac{30(\pi)}{180} = 0.524$ rad

ดังนั้น $0.524 = 0.15\,t^2$

$t = 1.869$ s

ดังนั้นจากสมการ (1) , (2) และ (3) แทนค่า $t = 1.869$ s ได้

$\theta = 0.524$ rad , $r = 0.481$ m

$\dot{\theta} = 0.561$ rad/s , $\dot{r} = -0.499$ m/s

$\ddot{\theta} = 0.3$ rad/s^2 , $\ddot{r} = -0.24$ m/s^2

ก) ความเร็วรวมของปลอก B จาก

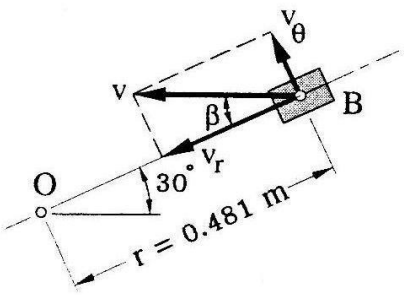
$v_r = \dot{r} = -0.449$ m/s

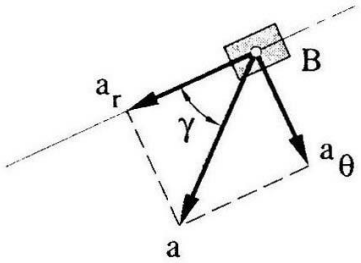
$v_\theta = r\dot{\theta} = 0.481\,(0.561) = 0.27$ m/s

$\therefore \quad v = \sqrt{(-0.449^2) + (0.27^2)}$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 16/20

เนื้อหา





ข) ความเร่งรวมของปลอก B จาก

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -0.24 - 0.481\,(0.561^2)$$

$$= -0.391 \quad m/s^2$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$= 0.481\,(0.3) + 2\,(-0.499)(0.561)$$

$$= -0.359 \quad m/s^2$$

$$a = (-0.391^2) + (-0.359^2)$$

$$= 0.531 \quad m/s^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 17/20

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้

ข้อที่ 1. การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งของอนุภาค เป็นไปตามสมการ $v_x = 50-16t$ และ $v_x = 50-16t$ $y = 100 - 4t^2$ ที่เวลา $t = 0\,s$, $x = 0$ จงเขียนทางเดินของอนุภาคและให้หาความเร็วและความเร่งของอนุภาคที่ตำแหน่ง $y = 0$

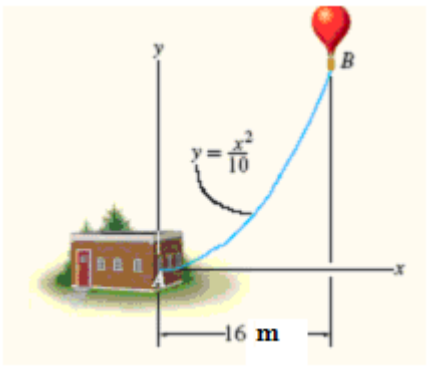
ตอบ $v = 50\ m/s$, $a = 17.9\ m/s^2$

ข้อที่ 2 ถ้าตำแหน่งการเคลื่อนที่ของลูกบอลลูน ถูกกำหนดโดยสมการ $x = (8t)$ และ $y = x^2 / 10$ จงหา

ก) ระยะทางระหว่างลูกบอลลูนกับตำแหน่ง A (เส้นตรง) เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

ข) ขนาดและทิศทางของความเร็วของลูกบอลลูน เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาทีและหามุมระหว่างแกน y และ x จากสมการดังต่อไปนี้

ตอบ. $r = 30.2\ m$, $v_x = 8\ m/s, v_y = 25.6\ m/s$



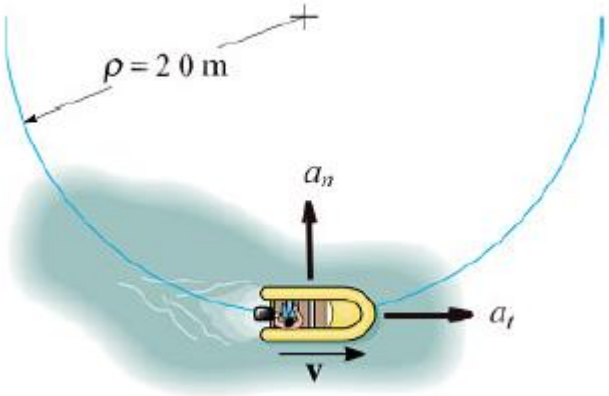
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 18/20

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 เรือลำหนึ่ง เคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งดังแสดงในภาพ จงคำนวณหาความเร่งของเรือลำนี้ ถ้ารัศมีความโค้งเท่ากับ 20 m. และอัตราเร็วเท่ากับ 5 m/s. (คงที่) และอัตราเร่งในแนวแกน t เท่ากับ 2 m/s^2

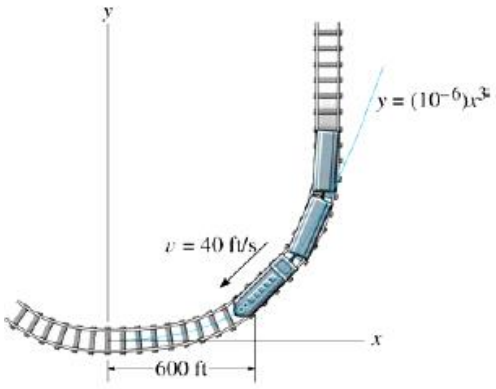
ตอบ a = 2.358 m/s^2



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

ข้อที่ 4. รถไฟขบวนหนึ่งวิ่งตามรางที่โค้งตามสมการ $y = (10^{-6})x^3$ จงคำนวณหาอัตราเร่งของรถไฟขบวนนี้ ถ้าที่ x = 600 ความเร็วของรถไฟจะเท่ากับ 40 ft/s (x และ y มีหน่วยเป็นฟุต (ft.)

ตอบ (a = 1.80 m/s^2)



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 4

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 19/20

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5. อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $r = 4 + t^2$ และ $\theta = \frac{t^2}{2}$ เมื่อ r มีหน่วยเป็น m และ θ มีหน่วยเป็น rad จงหาความเร็ว $\vec{v}$ และความเร่ง $\vec{a}$ ของอนุภาคนี้เมื่อ $t = 2s$

ตอบ. $\vec{v} = 4\vec{r}_1 + 16\vec{\theta}_1$ m/s, $\vec{a} = -30\vec{r}_1 + 24\vec{\theta}_1$ m/s^2

ข้อที่ 6. อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในแกน $r-\theta$ ในขณะนั้นถ้า $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ความเร่งในแนว θ เท่ากับ 16 mm/s^2, $r = 5$ mm, $\ddot{r} = 6$ mm/s^2, $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, $\ddot{\theta} = 4$ rad/s จงคำนวณหาขนาดของความเร็วของอนุภาคในขณะนั้น

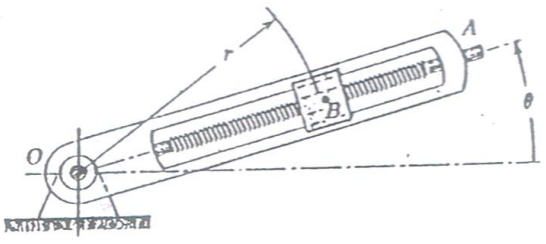
ตอบ. v = 4.72 m/s

ข้อที่ 7. ในขณะนั้นแขนพร้อมร่อง หมุนด้วยอัตราเร็ว N = 80 rev/min และหมุนช้าลงด้วยอัตรา 280 rev/min/s ระยะ r ในขณะนั้นเท่ากับ 250 mm และมีระยะลดลงด้วยอัตราคงที่ 300 mm/s จงหา $\vec{a}$ ในรูปของเวกเตอร์ในขณะนั้น

ตอบ. $\vec{a} = -17{,}55\vec{r}_1 - 12.36\vec{\theta}_1$ m/s^2

ข้อที่ 8. แขน OA หมุนตามสมการ $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ ในขณะเดียวกันเกลียวจะหมุน ซึ่งทำให้ตัวเลื่อน B เคลื่อนที่ไปตามเกลียวด้วยสมการ $r = 0.2 + 0.04t^2$ จงหาความเร่งของตัวเลื่อนในขณะที่เวลา t = 3s

ตอบ. a = 0.601 m/s^2



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 8

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 60,75,101-102
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 29-42
- เอกสารหมายเลข 5 หน้าที่ 40
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 47-58,60-64,71-80
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 36</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 4
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 4
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 4</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน โดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 5	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 2 จลนศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 5 หน้าที่ 1/20

ชื่อบทเรียน

2.6 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ (Relative Motion in Plane)

จุดประสงค์การสอน

2.6 เข้าใจหลักการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบได้ถูกต้อง

2.6.1 อธิบายลักษณะของเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ

2.6.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงขนานกับตำแหน่งเดิม (Translating Reference Axes)

2.6.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงหมุน (Rotating Reference Axes)

2.6.4 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคแบบสัมพัทธ์ในระนาบ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 2/20

เนื้อหา

2.6 การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบ (Relative Motion in a Plane)

ในหัวข้อก่อน ๆ ที่กล่าวมาข้างต้น การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคเป็นการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ ซึ่งการขจัด ความเร็ว และความเร่ง วัดเทียบจากระบบแกนซึ่งอยู่คงที่ ในบางปัญหานั้น ถ้าเราพิจารณาการเคลื่อนที่เป็นชนิดการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ วิธีทางที่อนุภาคเคลื่อนที่จะมีลักษณะซับซ้อนเป็นเส้นโค้งใด ๆ ซึ่งยากแก่การพิจารณา แต่ถ้าหากว่าพิจารณาการเคลื่อนที่นั้นเทียบกับระบบแกนที่มีการเคลื่อนที่แล้ว วิถีทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ก็จะมีลักษณะง่าย ๆ คือ เป็นเส้นตรงหรือวงกลม อีกทั้งง่ายต่อการคำนวณ ซึ่งการพิจารณาการเคลื่อนที่ในแบบหลังนี้เรียกว่า การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ (Relative Motion)

ในการเคลื่อนที่ซึ่งเป็นไปตามกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันนั้น ปริมาณต่าง ๆ จะคิดเทียบกับแกนอ้างอิงคงที่ (Primary Inertial System) แกนอ้างอิงต่าง ๆ บนผิวโลก อันที่จริงจะเป็นระบบแกนเคลื่อนที่ เนื่องมาจากการหมุนรอบตัวเองของโลกและการหมุนรอบดวงอาทิตย์ ในทางวิศวกรรม ผลของการหมุนนี้จะมีผลต่อปริมาณต่าง ๆ น้อยมาก ดังนั้น จึงถือได้ว่าแกนอ้างอิงต่าง ๆ ที่อยู่ติดกับผิวโลก เป็นแกนอ้างอิงคงที่ได้ เราอาจใช้แกนหมุนของโลกเป็นแกนอ้างอิงคงที่หรือเหตุการณ์ในจักรวาล เราอาจใช้แกนอ้างอิงบนดวงอาทิตย์เป็นแกนอ้างอิงคงที่ เป็นต้น

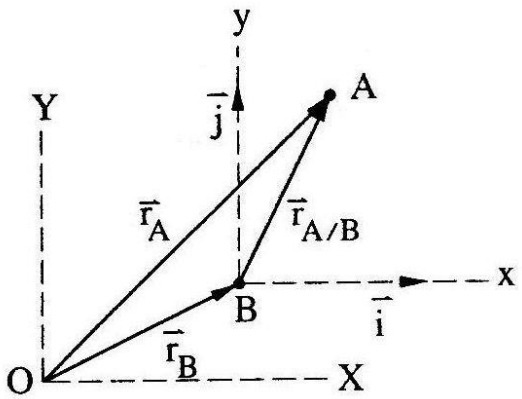
แกนอ้างอิงเคลื่อนที่แบ่งออกได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. แกนอ้างอิงเคลื่อนที่ขนานกับตำแหน่งเดิม (Translating Reference Axes)
2. แกนอ้างอิงซึ่งเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotating Reference Axes)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 3/20

เนื้อหา

1. การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงเคลื่อนที่ขนานกับตำแหน่งเดิม



รูปที่ 2.19 แสดงลักษณะของการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงขนานกับตำแหน่งเดิม

พิจารณาอนุภาค A และ B ซึ่งอาจมีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในระนาบที่กำหนดให้หรือในระนาบขนานกัน ดังรูปที่ 2.19 สำหรับหลักในการพิจารณาก็คือ ถ้าอนุภาคใดเป็นผู้สังเกตให้ตั้งแกน x – y ที่ผู้สังเกตนั้น ตัวอย่างเช่น ถ้าอนุภาค B เป็นผู้สังเกตการเคลื่อนที่ของอนุภาค A ก็ให้ตั้งแกน x - y ผ่านจุด B ซึ่งเป็นผู้สังเกตการเคลื่อนที่ของ A ดังแสดงในรูปที่ 2.19 เป็นต้น

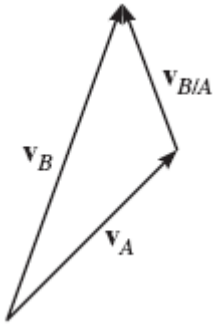
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 4/20

เนื้อหา

จากรูป (ก) จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \text{ .....(1)}$$



(ก)

และเมื่อพิจารณาจากรูป (ข) จะได้ความสัมพันธ์ดังต่อไปนี้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

เมื่อ

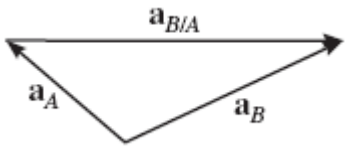
$\vec{r}_A$ คือ ตำแหน่งสัมบูรณ์ของ A

$\vec{r}_B$ คือ ตำแหน่งสัมบูรณ์ของ B

$\vec{r}_{A/B}$ คือ ตำแหน่งสัมบูรณ์ของ A เทียบกับ B

$\vec{v}_{A/B}$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของ A เทียบกับ B

$\vec{a}_{A/B}$ คือ ความเร่งสัมพัทธ์ของ A เทียบกับ B



(ข)

ในกรณีของสามอนุภาคคือ A ,B และ C เคลื่อนที่สัมพัทธ์กันจะได้

$$\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A/C} + \vec{v}_{C/B}$$

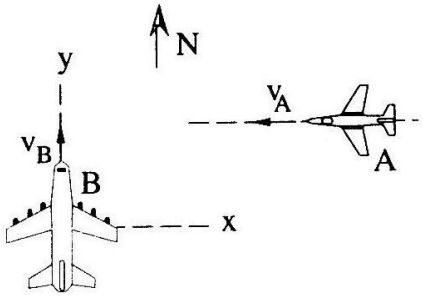
$$\vec{a}_{A/B} = \vec{a}_{A/C} + \vec{a}_{C/B} \text{ .....(2)}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 5/20

เนื้อหา

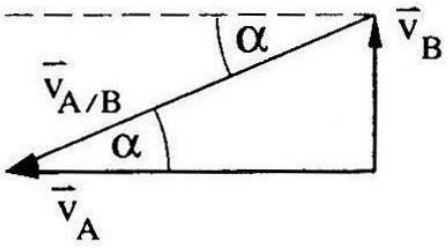
ตัวอย่างที่ 1

เครื่องบิน A บินไปทางทางตะวันตกด้วยความเร็ว 900 km/h เครื่องบิน B บินไปทางเหนือด้วยความเร็ว 600 km/h จงหาขนาดและทิศทางของความเร็วของเครื่องบิน A ที่สังเกตโดยผู้โดยสารบนเครื่องบิน B



หลักการวิเคราะห์

เครื่องบิน A ถูกสังเกตโดยผู้โดยสารบนเครื่องบิน B ดังนั้นจะต้องเขียนเวกเตอร์ให้อยู่ในรูปของ $\vec{v}_{A/B}$ ซึ่งจะได้ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$ แล้วหาขนาดและทิศทางได้



$\because \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$

ซึ่งเมื่อเขียนเวกเตอร์จะได้ตามรูป

ขนาดของ $\quad v_{A/B} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$

$$= \sqrt{(900)^2 + (600)^2}$$

$$v_{A/B} = 1082 \text{ km/h} \qquad \textbf{ตอบ}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{600}{900}$$

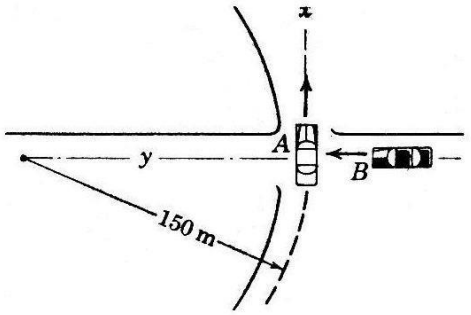
$$= 33.7° \qquad \textbf{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 6/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2

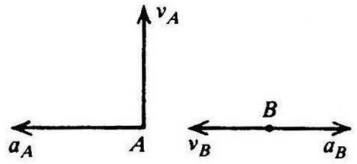
รถยนต์ A แล่นบนทางโค้งรัศมี 150 m ด้วยอัตราเร็วคงที่ 54 km/h ในขณะเดียวกันรถยนต์ B แล่นด้วยอัตราเร็ว 81 km/h แต่ช้าลงด้วยอัตราเร่ง 3 m/s^2 จงหาความเร็วและความเร่งของรถยนต์ A เมื่อสังเกตจากรถยนต์ B



หลักการวิเคราะห์

v_A และ v_B มีทิศทางตั้งฉากกับ ดังนั้นหา $v_{A/B}$ ได้ สำหรับ a_A และ a_B มีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้น $a_{A/B} = a_A - a_B$ โดยตรง

การคำนวณ

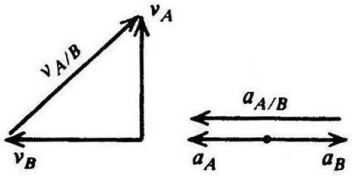


$$v_A = 54 \text{ km/h}$$

$$= \frac{54}{3.6} = 15 \text{ m/s}$$

$$v_B = 81 \text{ km/h}$$

$$= \frac{81}{3.6} = 22.5 \text{ m/s}$$



$$a_A = \frac{v_A^2}{\rho} = \frac{(15)^2}{150} = 1.5 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = -3 \text{ m/s}^2 \text{ (ช้าลง)}$$

$$\because \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B}$$

$$\therefore \quad a_{A/B} = a_A - a_B$$

$$= 1.5 - (-3)$$

$$= 4.5 \text{ m/s}^2 \quad \textbf{ตอบ}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

$$v_{A/B} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2}$$

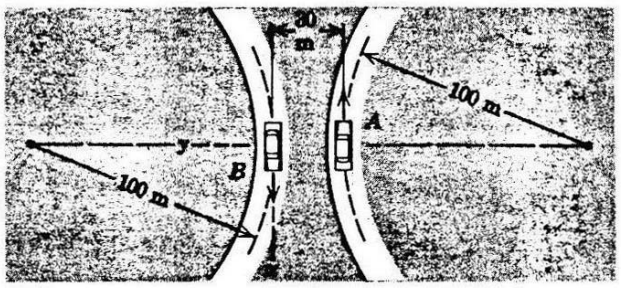
$$= \sqrt{(15)^2 + (22.5)^2} = 27.0 \text{ m/s} \quad \textbf{ตอบ}$$

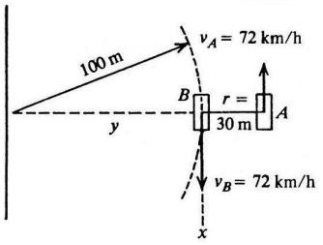
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 7/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3

รถยนต์ A และ B วิ่งบนทางโค้ง ด้วยอัตราเร็วเท่ากันคือ 72 km/h จงหาความเร็วของ A ซึ่งสังเกตโดยผู้โดยสารบน B เมื่อผู้โดยสารหมุนไปพร้อมกับ B ในขณะตำแหน่งตามรูป





หลักการวิเคราะห์

เนื่องจากรถยนต์ B วิ่งบนทางโค้ง และแกน x – y ผ่านจุด B ดังนั้น ω ของรถยนต์ B รอบจุดศูนย์กลางความโค้งมีค่าเท่ากับ ω ของแกน x – y นั้นเอง ใช้หลักความเร็วสัมพัทธ์แบบแกนหมุนหาค่า v_{rel} ได้ ซึ่งเป็นค่าที่ต้องการ

การคำนวณ

ในขณะที่ B เลี้ยวโค้งด้วยรัศมี 100 m ดังนั้นแกน x – y หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม

$$\omega = \frac{v_A}{r} = \frac{72/3.6}{100} = 0.2 \text{ rad/s}$$

$$\therefore \quad \vec{\omega} = 0.2\vec{k} \text{ rad/s}$$

ในที่นี้ $v_A = v_B = \frac{72}{3.6} = 20$ m/s

ระยะ $r = 30$ m

$$\therefore \quad \vec{v}_A = -20\vec{i} \quad , \quad \vec{v}_B = 20\vec{i} \quad ,$$

$$\vec{r} = \vec{r}_{A/B} = -30\vec{j}$$

$$\because \quad \vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{v}_{rel}$$

$$\therefore \quad -20\vec{i} = 20\vec{i} + 0.2\vec{k} \times (-30\vec{j}) + \vec{v}_{rel}$$

$$-20\vec{i} = 20\vec{i} + 6\vec{i} + \vec{v}_{rel}$$

$$\therefore \quad \vec{v}_{rel} = -46\vec{i} \text{ m/s}$$ **ตอบ**

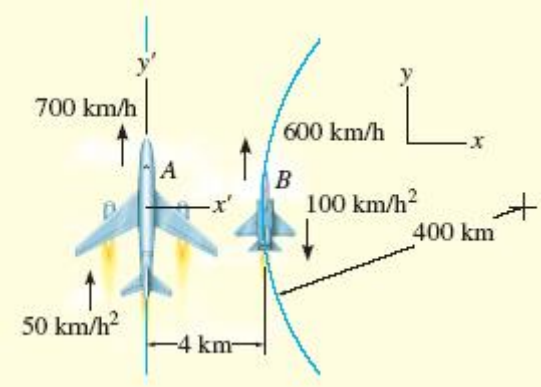
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 8/20

เนื้อหา

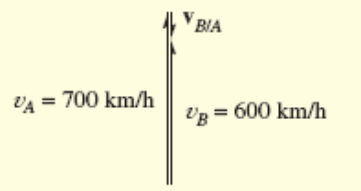
Relative motion analysis : Two particle Using Translating Axes.

ตัวอย่างที่ 4

เครื่องบิน 2 ลำ กำลังบินอยู่ในทิศทางดังแสดงในภาพ โดยที่เครื่องบิน A บินด้วยความเร็ว 700 km/h ส่วนเครื่องบิน ด้วยความเร็ว 600 km/h จงหาความความเร็ว และความเร่งสัมพัทธ์ถ้านักบินที่อยู่บนเครื่อง A สังเกตการบินของเครื่องบิน B



วิธีทำ



จากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบ Translating Axes

สมการความเร็วสัมพัทธ์ $V_B = V_A + V_{B/A}$

สมการความเร่งสัมพัทธ์ $a_B = a_A + a_{B/A}$

เมื่อ

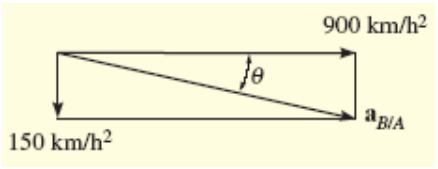
$\vec{v}_A = 700\,\vec{j}$ km/h

$\vec{v}_B = 600\,\vec{j}$ km/h

และ

$\vec{a}_A = 50\,\vec{j}$ km/h²

$(\vec{a}_B)_t = -100\,\vec{j}$ km/h²



$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600\,\text{km/h})^2}{400\,\text{km}} = 900 \text{ km/h}^2 \rightarrow$$

แทนค่าลงในสมการความเร็วสัมพัทธ์

จะได้ $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A} \Rightarrow 600\,\vec{j} = 700\vec{j} + \vec{v}_{B/A}$ km/h

ดังนั้น $\vec{v}_{B/A} = (600 - 700)\vec{j} = -100$ km/h หรือ $\vec{v}_{B/A} = 100\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\downarrow$ **ตอบ**

แทนค่าลงในสมการความเร่งสัมพัทธ์

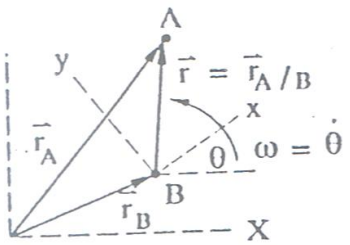
จะได้ $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A} \Rightarrow (900\,\vec{i} - 100\,\vec{j}) = 50\vec{j} + \vec{a}_{B/A}$ km/h²

ดังนั้น $\vec{a}_{B/A} = 900\,\vec{i} - 150\,\vec{j}\ \ \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 9/20

เนื้อหา

2. การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ในระนาบแบบแกนอ้างอิงหมุน



พิจารณาอนุภาค A และ B ซึ่งเคลื่อนที่อย่างอิสระต่อกันในระนาบ ดังรูป (A) ตั้งแกน $x-y$ ผ่านจุด B ซึ่งเป็นผู้สังเกตการเคลื่อนที่ A และในขณะเดียวกัน $x-y$ หมุนไปด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = \dot{\theta}$ หรือในรูปเวกเตอร์ $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\theta}\vec{k}$ (k เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในแกน z ซึ่งตั้งฉากกับระนาบ x - y)

จากรูป (ก) จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{r}_{A/B} = \vec{r}_B + \vec{r}$$
$$= \vec{r}_B + \vec{i}x + \vec{j}y \quad \text{.....(1)}$$

เมื่อ

$\vec{i}$, $\vec{j}$ คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน x และ y ตามลำดับ

$\vec{r}_A$, $\vec{r}_B$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาค A และ B ตามลำดับ ซึ่งวัดเทียบกับแกนอ้างอิง $x-y$

$\vec{r}_{A/B} = \vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของอนุภาค A เทียบกับ B ซึ่งเป็นค่าสัมพัทธ์ เนื่องจากวัดเทียบกับแกน $x-y$ ที่มีการหมุน

เมื่อหาอนุพันธ์ของสมการ (1) เทียบกับเวลาจะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{i}x + \vec{j}y) + (\dot{\vec{i}}x + \dot{\vec{j}}y) \quad \text{.....(2)}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 10/20

เนื้อหา

จากรูป (B) $d\vec{i} = \vec{j}d\theta$ .....(3)

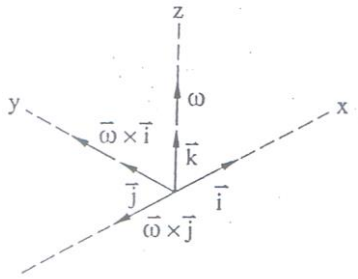
เนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยมีขนาด = 1

ดังนั้น $d\vec{i} = 1 \cdot d\theta\vec{j} = d\theta\vec{j}$

และ $d\vec{j} = -\vec{i}d\theta$ .....(4)

จากสมการ (3) $\frac{d\vec{i}}{dt} = \dot{\vec{i}} = \vec{j}\frac{d\theta}{dt} = \vec{j}\omega$

จากสมการ (4) $\frac{d\vec{j}}{dt} = \dot{\vec{j}} = -\vec{i}\frac{d\theta}{dt} = -\vec{i}\omega$



จากรูป (C) $\vec{\omega}\times\vec{i} = \vec{j}\omega$

และ $\vec{\omega}\times\vec{j} = -\vec{i}\omega$

$\therefore$ $\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i}$ และ $\dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j}$ .....(5)

$$\vec{i}x + \dot{\vec{j}}y = (\vec{\omega}\times\vec{i}) + (\vec{\omega}\times\vec{j})y$$
$$= \vec{\omega}\times\vec{i}x + \vec{\omega}\times\vec{j}y$$
$$= \vec{\omega}\times(\vec{i}x + \vec{j}y)$$
$$= \vec{\omega}\times\vec{r}$$

และเนื่องจาก $\vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y} = \vec{v}_{rel}$ ดังนั้นจากสมการ (2) จะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$ .....(6)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 11/20

เนื้อหา

เมื่อ

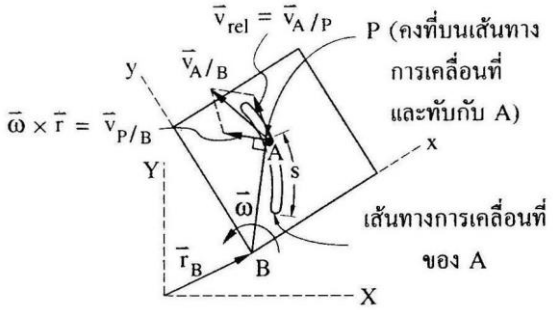
$\vec{v}_A$ คือความเร็วสัมบูรณ์ของอนุภาค A

$\vec{v}_B$ คือความเร็วสัมบูรณ์ของอนุภาค B

$\vec{\omega}$ คือความเร็วเชิงมุมของแกน $x-y$ ซึ่งมีจุดกำเนิดอยู่ที่ B

$\vec{r}$ คือเวกเตอร์ตำแหน่งของ A เทียบกับ B ซึ่งวัดตามแนวแกน $x-y$

$\vec{v}_{rel}$ คือความเร็วสัมพัทธ์เทียบกับแกน $x-y$ (ความเร็วของ A เทียบกับแกน $x-y$)



จากสมการที่ 6 สามารถเปลี่ยนรูปต่าง ๆ ได้ดังนี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

จะได้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{p/B} + \vec{v}_{A/p}$$

$$= \vec{v}_p + \vec{v}_{p/B}$$

หรือ

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

จากสมการที่ 6 เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้ว่า

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + (\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}) + \dot{\vec{v}}_{rel} \quad \text{.....(7)}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}(\vec{i}x + \vec{j}y)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 12/20

เนื้อหา

จากสมการ (1) , (2) และ (2.12) จะได้

$$\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}} = \vec{\omega}\times[(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{v}_{rel}]$$

$$= \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} \quad \text{.....(8)}$$

$$\therefore \quad \dot{\vec{v}}_{rel} = \frac{d}{dt}(\vec{i}\dot{x} + \vec{j}\dot{y})$$

$$= \dot{\vec{i}}\dot{x} + \dot{\vec{j}}\dot{y} + \vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y}$$

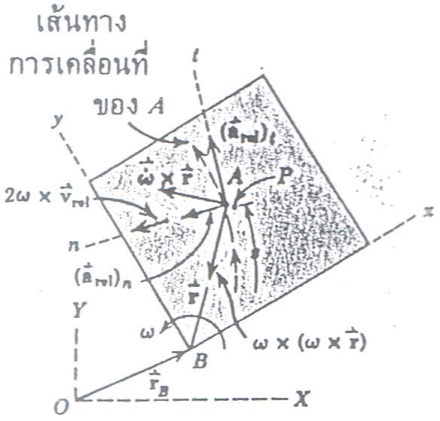
$$= \vec{\omega}\times(\dot{\vec{i}}\dot{x} + \dot{\vec{j}}\dot{y}) + (\vec{i}\ddot{x} + \vec{j}\ddot{y});$$

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i};\ \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j}$$

$$= \vec{\omega}\times\vec{v}_{rel} + \vec{a}_{rel} \quad \text{.....(9)}$$

จากสมการ (7) , (8) และ (9) จะได้

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}}\times r) + (\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times r)) + (2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{rel} \quad \text{.....(10)}$$



ขนาดต่าง ๆ ของสมการ (10) เป็นดังนี้ ดังรูป

$|\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}|$ = $a_{P/B}$ ในแนวตั้งฉากกับ r = $r\ddot{\theta}$

$|\vec{\omega}\times(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r})|$ = $a_{P/B}$ ในแนวเข้าหาจุด B = $r\dot{\theta}^2$

$\vec{a}_{rel} = (\vec{a}_{rel})_n + (\vec{a}_{rel})_t$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 13/20

เนื้อหา

$\left|(\vec{a}_{rel})_n\right|$ = $\frac{v_{rel}^2}{\rho}$ = ความเร่งตามแนว n

$\left|(\vec{a}_{rel})_t\right|$ = s = ความเร่งตามแนว t (สัมผัสกับโค้ง)

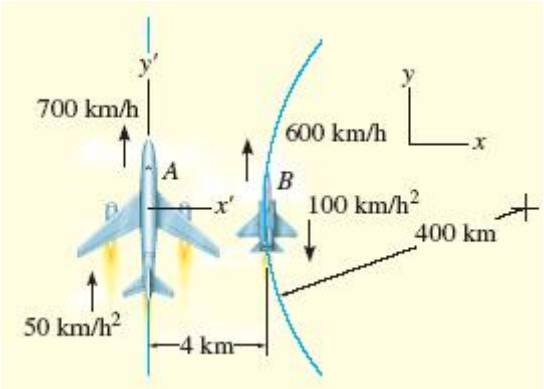
$\left|2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}\right|$ = ความเร่งคอริออลิส มีทิศทางตามกฎมือขวา เป็นเทอมที่เกิดขึ้นเนื่องจากวัตถุเคลื่อนที่ในขณะที่มีการหมุน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 14/20

เนื้อหา

Relative Motion Analysis : Using Rotating Axes.

ตัวอย่างที่ 5 เครื่องบิน 2 ลำ กำลังบินอยู่ในทิศทางดังแสดงในภาพ โดยที่เครื่องบิน A บินด้วยความเร็ว 700 km/h ส่วนเครื่องบิน ด้วยความเร็ว 600 km/h จงหาความความเร็ว และความเร่งสัมพัทธ์ถ้านักบินที่อยู่บนเครื่อง B สังเกตการบินของเครื่องบิน A



วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบ Rotating Axes

สมการความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$

สมการความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}} \times r) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)) + (2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{rel}$

เมื่อ

$\vec{v}_B = 600\,\vec{j}$ km/h

$(a_B)_n = \dfrac{V_B^2}{\rho} = \dfrac{600^2}{400} = 900$ km/h^2

, $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$

$= 900\,\vec{i} - 100\,\vec{j}$ km/h^2

, $\omega = \dfrac{V_B}{\rho} = \dfrac{600 \text{ km/h}}{400 \text{ km}} = 1.5$ rad/s

หรือ $\vec{\omega} = -1.5\,\vec{k}$ rad/s

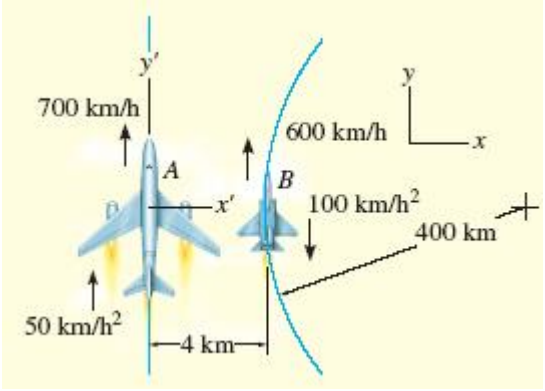
และ $\dot{\vec{\omega}} = \dfrac{(\vec{a}_B)_t}{\rho} = \dfrac{100 \text{ km/h}^2}{400 \text{ km}} = 0.25$ rad/s

หรือ $\dot{\vec{\omega}} = 0.25\vec{k}$ rad/s^2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 15/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 (ต่อ)



หาความเร็วสัมพัทธ์

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการความเร็วสัมพัทธ์

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

$$700\vec{j} = 600\,\vec{j} + (-1.5\vec{k}) \times (-4\,\vec{i}) \times \vec{v}_{rel}$$

ดังนั้น $\vec{v}_{rel} = 94\,\vec{j}$ km/h **ตอบ**

หาค่าความเร่งสัมพัทธ์

แทนค่าทั้งหมดลงในสมการความเร่งสัมพัทธ์

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}} \times r) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)) + (2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{rel}$$

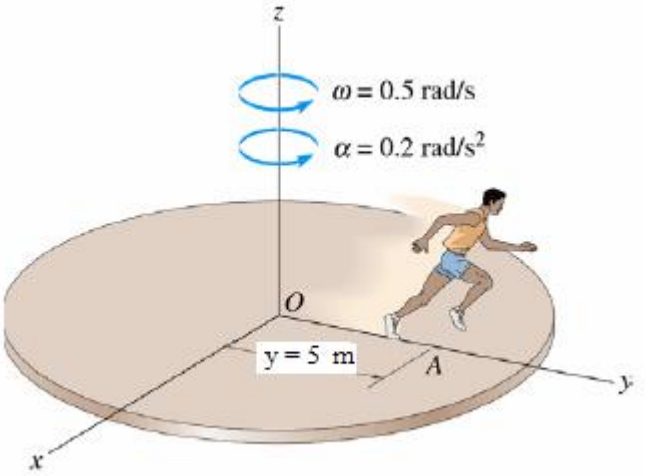
$$50\vec{j} = (900\vec{i} - 100\vec{j}) + (0.25\vec{k}) \times (-4\vec{i}) + (-1.5\vec{k}) \times [(-1.5\vec{k}) \times (-4\vec{i})] + 2(-1.5\vec{k}) \times (94\vec{j}) + \vec{a}_{rel}$$

ดังนั้น $\vec{a}_{rel} = \{-1{,}191\vec{i} + 151\vec{j}\}\ \frac{km}{h^2}$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 5 เลขหน้า 16/20

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 6 ชายคนหนึ่งวิ่งอยู่บนจานที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 0.5$ rad/s และมีความเร่งเชิงมุม $\alpha = 0.2$ rad/s^2 โดยในขณะที่ชายคนนี้ห่างจากจุด O เป็นระยะทางเท่ากับ 5 m ชายคนนี้มีความเร็วเท่ากับ 2 m/s และมีความเร่งเท่ากับ 3 m/s^2 ในทิศทางดังแสดงในภาพ จงหาความเร็วและความเร่งของชายคนนี้



วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบ Rotating Axes

สมการความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$ …(1)

สมการความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}} \times r) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)) + (2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{rel}$ …(2)

เมื่อ

$v_0 = 0$

$a_0 = 0$

$\omega = 0.5\,\vec{k}$ rad/s

$\dot{\omega} = 0.2\,\vec{k}$ rad/s^2

$\vec{r}_{AC/O} = \vec{r}_{rel} = 5\,\vec{j}$ m

$(\vec{v}_{A/O})_{XYZ} = \vec{v}_{rel} = 2\,\vec{j}$ m/s

$(\vec{a}_{A/O})_{XYZ} = \vec{a}_{rel} = 3\,\vec{j}$ m/s^2

$a_{Cor} = (2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel})$

$= 2(0.5)\vec{k} \times (2)\vec{j}$

$= -2\,\vec{i}$ m/s^2

จากการแทนค่าลงในสมการที่ (1) และ (2) จะได้

$v_C = [-2.5\vec{i} + 2\vec{j}]$ m/s

$a_C = [-3\vec{i} + 1.75\vec{j}]$ m/s^2 **ตอบ**

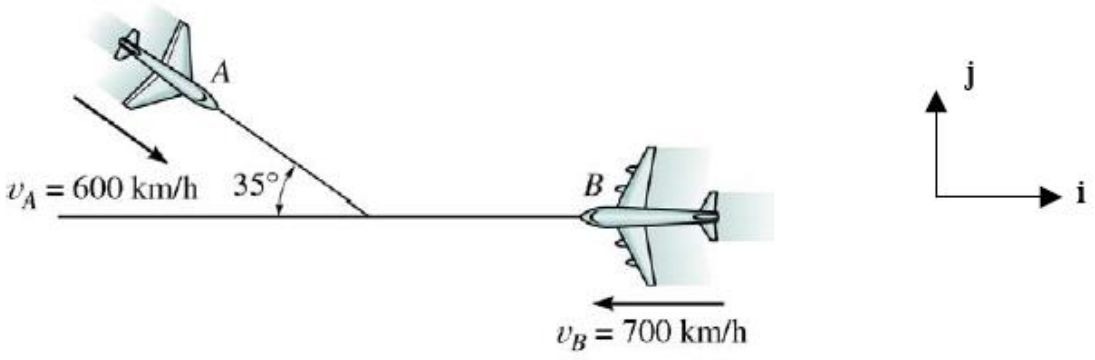
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 17/20

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยการแสดงวิธีทำ

ข้อที่ 1 เครื่องบิน A และ B กำลังบินอยู่ในทิศทางดังแสดงในภาพ ถ้าในขณะนั้นเครื่องบิน A มีความเร็ว V_A = 600 km/h และ เครื่องบิน B มีความเร็ว V_B = 700 km/h จงหาความเร็วสัมพัทธ์ของเครื่องบิน B ถ้าผู้มองอยู่บนเครื่องบิน A ($V_{B/A}$)

ตอบ ($v_{B/A}$ = 1,240.2 km/h และทำมุม 163.9°)



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ข้อที่ 2 : ในขณะตำแหน่งดังแสดงในภาพ รถยนต์ A มีความเร่งในทิศทางการเคลื่อนที่ รถยนต์ B แล่นด้วยอัตราเร็ว 72 km/h และกำลังเร่งเพิ่มขึ้น ถ้าความเร่งของ B ซึ่งสังเกตจาก A มีค่าเป็นศูนย์ในขณะนั้น จงหาความเร่งของ A และอัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วของ B

ตอบ. (a_A = 2.83 m/s^2 , $\dot{v}_B$ = 2 m/s^2)

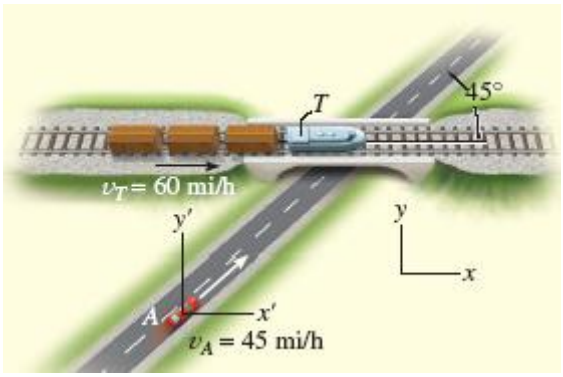
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 18/20

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 รถไฟขบวนหนึ่ง เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ 60 mi/h โดยที่รางรถไฟอยู่เหนือถนนที่มีรถยนต์อีกคันหนึ่ง วิ่งมาด้วยอัตราเร็ว 45 mi/h ตามทิศทาง ดังแสดงในภาพ ถ้าผู้โดยสารที่อยู่ในรถยนต์มองผู้โดยสารที่อยู่บนรถไฟ จงหาขนาดของความเร็วสัมพัทธ์ ($v_{T/A}$)

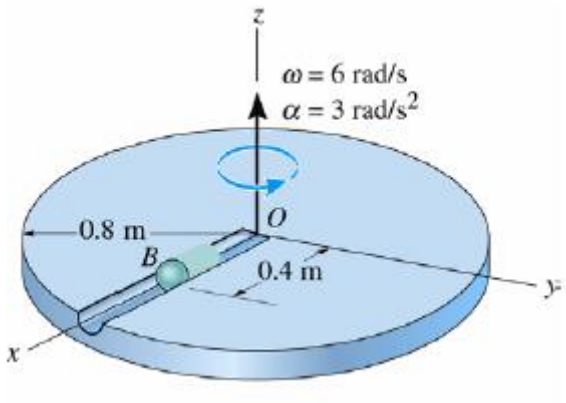
ตอบ. [$\vec{v}_{T/A} = 28.2\vec{i} - 31.8\vec{j}$ m/s]



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

ข้อที่ 4 : ลูกบอลวิ่งอยู่ในร่องบนจานที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 6$ rad/s และมีความเร่งเชิงมุม $\alpha = 3$ rad/s^2 โดยในขณะที่ลูกบอลนี้ห่างจากจุด O เป็นระยะทางเท่ากับ 0.4 m ลูกบอลนี้มีความเร็วเท่ากับ 0.6 m/s และมีความเร่งเท่ากับ 0.15 m/s^2 ในทิศทางดังแสดงในภาพ จงหาความเร็วและความเร่งของลูกบอลนี้

ตอบ. [$v_C = 0.6\vec{i} + 2.4\vec{j}$ m/s] และ [$\vec{a}_C = -14.2\vec{i} + 8.4\vec{j}$ m/s^2]



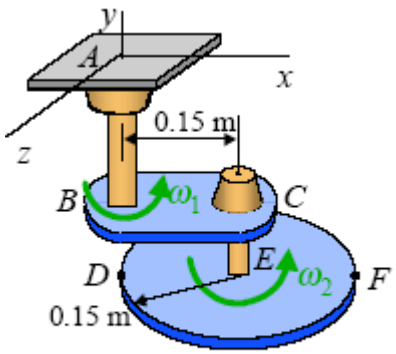
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 4

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 19/20

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5 แผ่นจานกลมรัศมี 0.15 m หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ (ω_2 = คงที่)

ถ้า $\omega_1 = \omega_2 = 3$ rad/s



$\alpha = 0$

จงหา

ก) ความเร็ว และความเร่งของจุด D

ตอบ. $v_D = 0.45\vec{k}$ m/s $a_D = 4.05\vec{i}$ m/s^2

ข) ความเร็ว และความเร่งของจุด F

ตอบ. $v_F = -1.5\vec{k}$ m/s $a_F = -6.75\vec{i}$ m/s^2

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 115-117,124-125,
127-130,191,196
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 42-49
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 85-93,98-107
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 85-86,366-367</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 5
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 5
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 5</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน โดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 6	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 3 จลนพลศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 6 หน้าที่ 1/11

ชื่อบทเรียน

3.1 แรงและการเคลื่อนที่

จุดประสงค์การสอน

3.1 เข้าใจหลักการของแรงและการเคลื่อนที่ได้ถูกต้อง

3.1.1 อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างแรงและการเคลื่อนที่

3.1.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน $x - y$

3.1.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน $n - t$

3.1.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคในระบบแกน $r - \theta$

3.1.5 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของแรงและการเคลื่อนที่

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 2/11

เนื้อหา

จลนพลศาสตร์ของอนุภาค

เมื่อระบบของแรงไม่สมดุลมากระทำต่ออนุภาค จะเป็นผลทำให้อนุภาคนั้น เกิดความเร่งและมีการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ จลนศาสตร์ของอนุภาคจึงศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างระบบของแรงไม่สมดุลกับการเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่อันเป็นผลต่อเนื่อง กฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงและความเร่ง ดังนี้ คือ $F \alpha a$

นั่นคือ $\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \text{.....} = \frac{F}{a} = C, (\text{ค่าคงที่})$

ค่าคงที่นี้จะเป็นค่าที่แสดงคุณสมบัติอันหนึ่งของอนุภาค เรียกว่า ค่าความเฉื่อย(Inertia) ของอนุภาคในการต้านทานการเปลี่ยนแปลงความเร็ว อนุภาคที่มีค่าความเฉื่อยสูง (ค่า C มาก) จะมีความเร่งน้อยสำหรับแรงกระทำอันหนึ่ง ในทางกลับกัน อนุภาคที่มีค่าความเฉื่อยต่ำ(ค่า C น้อย) จะมีความเร่งมากสำหรับแรงกระทำที่เท่ากันนั้น

มวล m เป็นปริมาณหนึ่งที่ใช้วัดค่าความเฉื่อย เขียนได้เป็น $C = km$ โดย k คือค่าคงที่

ดังนั้น $F = kma$ โดยทั่วไปจะกำหนดค่า k = 1 จึงเขียนสมการในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้ $\vec{F} = m\vec{a}$

ข้อสังเกต เมื่อพิจารณาจากสมการ $\vec{F} = m\vec{a}$ จะได้ว่า

1. ขนาดของแรงกระทำ F จะเท่ากับผลคูณของมวล m และขนาดความเร่ง a
2. ทิศทางของ F และ a จะมีทิศทางเดียวกัน

ระบบของหน่วยที่ใช้ค่า $k = 1$ นี้เรียกว่า ระบบจลนศาสตร์ (Kinetic System) ซึ่งหน่วยของแรง มวล และความเร่ง จะขึ้นต่อกัน

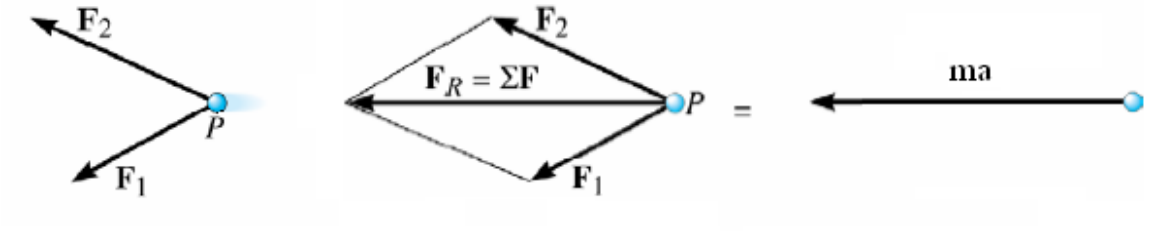
ในระบบ SI หน่วยของแรง F (Newton, N) เป็นหน่วยอนุพันธ์ที่กำหนดขึ้น โดยใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน คือหน่วยมูลฐานของมวล (kg) คูณกับหน่วยของความเร่ง (m/s^2) ดังนั้นหน่วยของแรงคือ $N = kg.m/s^2$ ระบบนี้จึงเรียกว่า ระบบสัมบูรณ์ (Absolute System) ทั้งนี้เพราะหน่วยของแรงจะขึ้นอยู่กับค่าสัมบูรณ์ของมวล

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 3/11

เนื้อหา

3.1 แรงและการเคลื่อนที่

จากกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตันกล่าวว่า “ถ้ามีแรงลัพธ์ที่มีขนาดไม่เท่ากับศูนย์มากระทำต่ออนุภาค จะทำให้อนุภาคนั้นเคลื่อนที่ด้วยความเร่งซึ่งมีทิศเดียวกับแรงลัพธ์ที่มากระทำ โดยขนาดของความเร่งนี้จะแปรผันโดยตรงกับขนาดของแรงลัพธ์ที่มากระทำ และแปรผกผันกับมวลของอนุภาคนั้น”



(ก) ทิศทางของแรงที่กระทำ (ข) แผนผังวัตถุอิสระ (ค) คิเนเมติกส์ไดอะแกรม

รูปที่ 3.1 แสดงความสัมพันธ์ตามสมการกฎการเคลื่อนที่ข้อที่สองของนิวตัน

จากความสัมพันธ์ดังแสดงในภาพจึงเขียนสมการการเคลื่อนที่ได้ดังนี้

$$\sum F = ma$$

เมื่อ $\sum F$ = ผลรวมของแรงลัพธ์ที่มากระทำ มีหน่วยเป็นนิวตัน (N)

m = มวลของวัตถุที่ถูกกระทำ มีหน่วยเป็นกิโลกรัม (kg)

a = ความเร่ง มีหน่วยเป็น เมตร/(วินาที)^2 (m/s^2)

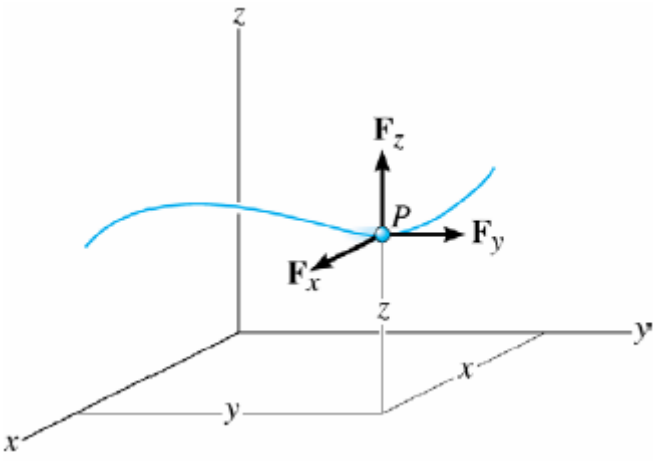
ซึ่งในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนั้นจะต้องพิจารณาตามลักษณะของการเคลื่อนที่ในแต่ละระบบการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 4/11

เนื้อหา

1. สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดฉาก x ,y,z

ถ้าอนุภาคหนึ่งมีมวล m ถูกกระทำด้วยแรงใด ๆ ที่อยู่ในระบบพิกัด x, y , z สมการการเคลื่อนที่ของมวล m นี้ จะหาได้จากสมการดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.2 แสดงการเคลื่อนของอนุภาคในระบบพิกัดฉาก x , y , z

$$(F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}) = m(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})$$

เมื่อ $F_x = ma_x$

$F_y = ma_y$

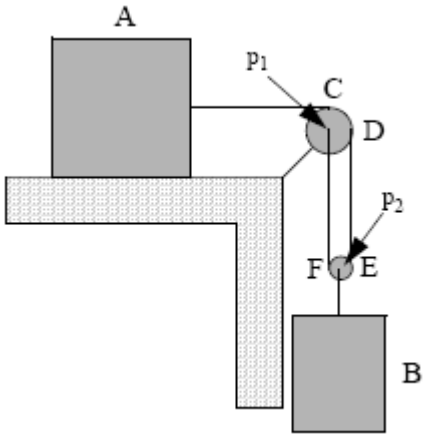
$F_z = ma_z$

และจะหาขนาดของแรงลัพธ์ (F) ได้จาก $F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 5/11

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 จากภาพถ้ากล่อง A มีมวล m_A = 100 kg และกล่อง B มีมวล 300 kg ถ้าไม่คิดแรงเสียดทานระหว่างพื้นและผิวของกล่อง A และไม่คิดน้ำหนักของพูลเลย์ จงหาอัตราเร่งของกล่องทั้งสองและแรงตึงในเส้นเชือก



วิธีทำ

จากความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่แบบขึ้นต่อกัน จะได้

$$\dot{x}_A + 2\dot{x}_B = 0 \Rightarrow |v_A| = |2v_B| \quad \ldots(1)$$

$$a_A + 2a_B = 0 \Rightarrow |a_A| = 2|a_B| \quad \ldots(2)$$

พิจารณากล่อง A

$$\Sigma F_X = T_A = m_A a_{Ax} \quad \ldots(3)$$

พิจารณากล่อง B

$$\Sigma F_y = T_B - W_B = -m_B a_{By} \quad \ldots(4)$$

พิจารณาแรงตึงในเส้นเชือกจะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$T_B = 2\,T_A \quad \ldots(5)$$

แทนค่าสมการที่ (5) ลงในสมการที่ (4)

$$2T_A - m_B g = -m_B a_B \quad \ldots(6)$$

และเนื่องจาก $A_A = 2a_B = 2a_{BY}$

ดังนั้นจากสมการที่ (3) จะได้ $T_A = m_A 2a_B$ …(7)

แก้สมการที่ (6) และ (7) จะได้

$$a_A = \frac{2m_B}{4m_A + m_B}(g) \quad \text{และ} \quad a_B = \frac{m_B}{4m_A + m_B}(g) \quad \ldots(8)$$

และจะได้

$$T_A = \frac{2m_A m_B}{4m_A + m_B}(g) \quad \text{และ} \quad T_B = \frac{4m_A m_B}{4m_A + m_B}(g) \quad \ldots(9)$$

แทนค่า m_A = 100 kg และ m_B = 300 kg ลงในสมการที่ (8) และ (9) จะได้

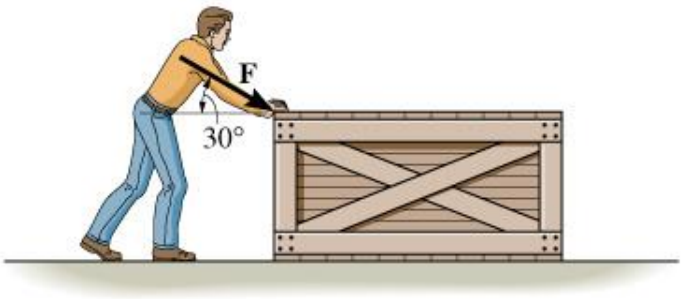
T_A = (600/7) (9.81) = 840.9 N

T_B = (1,200/7) (9.81) = 1,682 N **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 6/11

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 ชายคนหนึ่งผลักกล่องซึ่งมีมวล 60 kg. โดยทิศทางของแรงกระทำกับระนาบ 30 องศา ถ้าสัมประสิทธ์ความเสียดทานสถิตระว่างพื้นและผิวสัมผัสของกล่อง $\mu_s = 0.6$ และสัมประสิทธ์ความเสียดทานจลน์ระว่างพื้นและผิวสัมผัสของกล่อง $\mu_k = 0.3$ จงหาขนาดของความเร่งของกล่องใบนี้



วิธีทำ

พิจารณาในแนวแกน x

$(+) \rightarrow \Sigma F_x = 0;$ $\quad F\cos 30 - 0.6\,N = 0$ …(1)

$$F = \frac{0.6N}{\cos 30}$$ …(2)

พิจารณาในแนวแกน y

$(+) \uparrow \Sigma F_y = 0;$ $\quad N - 60\,(9.81) - F\sin 30 = 0$ …(3)

$N = 60(9.81) + F\sin 30$ …(4)

แทนค่า F จากสมการที่ (1) ลงในสมการที่ (4)

ดังนั้น $$N = 60(9.81) + \left[\frac{0.6N}{\cos 30}\right]\sin 30$$

$N = 60(9.81) + 0.3464\,N$

$(1-0.3464)N = 60(9.81)$

$$N = \frac{60(9.81)}{0.6536} = 900.55\ N \quad \#\#$$

แทนค่า N ลงในสมการที่ 2 จะได้

$$F = \frac{900.55}{\cos 30} = 1{,}039.86\ N$$

จากสมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดตั้งฉาก $\Sigma F_x = ma_x$

แทนค่า $(1{,}039x\cos 30) - 0.3(900.55) = (60)a_x$

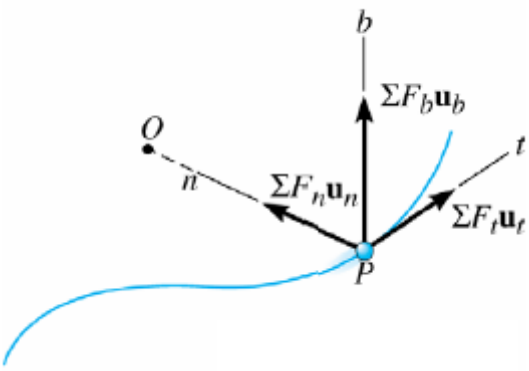
ดังนั้น $a_x = 10.49\ \frac{m}{s^2}$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 7/11

เนื้อหา

2. สมการการเคลื่อนที่ในระบบสัมผัส-ตั้งฉาก (n-t)

ถ้าอนุภาคมีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งดังแสดงในภาพ ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของอนุภาคนั้นจะต้องพิจารณาแรงที่ที่กระทำต่ออนุภาคนั้นออกเป็นสองส่วนคือ แรงในแนวสัมผัสกับเส้นโค้ง (ทิศทางเดียวกันกับการเคลื่อนที่) และแรงในแนวทิศทางตั้งฉากกับทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาคนั้น (ทิศทางพุ่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางของเส้นโค้ง) ซึ่งจะใช้สมการในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.3 แสดงการเคลื่อนของอนุภาคในระบบสัมผัส – ตั้งฉาก (n – t)

$$(\Sigma F_n u_n + \Sigma F_t u_t + \Sigma F_b u_b) = m(a_n + a_t)$$

เมื่อ u_n, u_t, u_b = Unit Vector

$\Sigma F_n = ma_n$

$\Sigma F_t = ma_t$

$\Sigma F_b = 0$

และ

$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \rho\dot{\theta}^2$ = ความเร่งในแนวแกน n

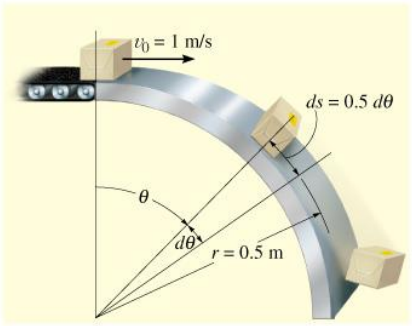
$a_t = \frac{dv}{dt}$ = ความเร่งในแนวแกน t

และจะหาขนาดของแรงลัพธ์ (F) ได้จาก $F = \sqrt{(F_n)^2 + (F_t)^2}$

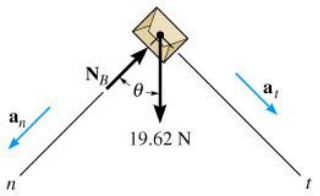
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 8/11

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 กล่องใบหนึ่งดังแสดงในภาพมีมวล 2 kg ถูกส่งด้วยสายพานคอนเวนเยอร์เข้าสู่ผิวโค้งราบเรียบด้วยความเร็ว 1 m/s ดังแสดงในภาพ โดยรัศมีของผิวโค้งเท่ากับ 0.5 m จงหาขนาดของมุม (θ) ทันทีที่กล่องใบนี้หลุดจากผิวโค้ง



(a)



(b)

วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่ในระบบ n – t

$$\Sigma F_n = ma_n \quad \Rightarrow \quad -N_B + 19.62\cos\theta = 2\frac{v^2}{0.5} \qquad \ldots(1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t \quad \Rightarrow \quad 19.62\sin\theta = 2a_t \qquad \ldots(2)$$

ทันทีที่กล่องหลุดจากผิวโค้งนั่นแสดงว่า (N = 0)

และจากสมการ $vdv = ads$ และ $ds = rd\theta = 0.5\,d\theta$

ดังนั้น $$a_t = \frac{vdv}{0.5d\theta} \qquad \ldots(3)$$

แทนค่าสมการที่ (3) ลงในสมการที่ (2)

จะได้ $$vdv = 4.905\sin\theta\,d\theta$$

ดังนั้น $$\int_1^v vdv = 4.905\int_0^\theta \sin\theta d\theta$$

$$\frac{v^2}{2}\Big|_1^2 = -4.905\cos\theta\Big|_0^\theta$$

$$v^2 = 9.81(1-\cos\theta)+1 \qquad \ldots(4)$$

แทนค่าที่ในสมการที่ (4) ลงในสมการที่ 2

จะได้ $$19.62\cos\theta_{max} = \frac{2}{0.5}\left[9.81(1-\cos\theta_{max}) + 1\right]$$

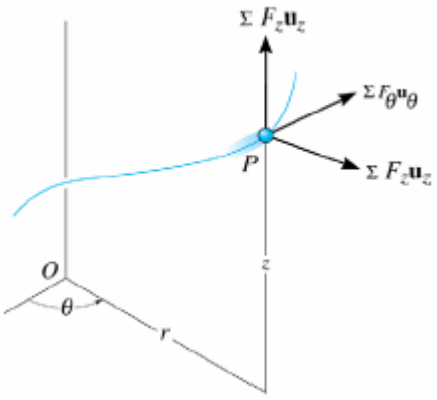
$$\cos\theta_{max} = \frac{43.24}{58.86} = 42.7^\circ$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 9/11

เนื้อหา

4. สมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดทรงกระบอก

ถ้าอนุภาคใด ๆ มีการเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งบนระนาบหนึ่ง ๆ ภายใต้แรงกระทำดังแสดงในภาพ ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบนี้จะใช้สมการการเคลื่อนที่ดังต่อไปนี้



รูปที่ 3.4 แสดงการเคลื่อนของอนุภาคในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$(\Sigma F_r u_r + \Sigma F_\theta u_\theta + \Sigma F_z u_z) = m(a_r u_r + a_\theta u_\theta + a_z u_z)$$

เมื่อ u_r, u_θ, u_z = Unit Vector

$\Sigma F_r = ma_r$

$\Sigma F_\theta = ma_\theta$

$\Sigma F_z = ma_z$

และ

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$

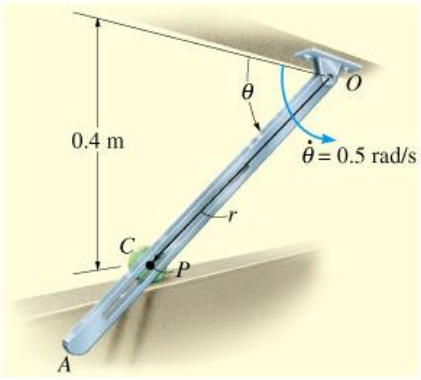
$a_\theta = r\ddot{\theta} - 2\dot{r}\dot{\theta}$

และจะหาขนาดของแรงลัพธ์ (F) ได้จาก $F = \sqrt{(F_r)^2 + (F_\theta)^2 + (F_z)^2}$

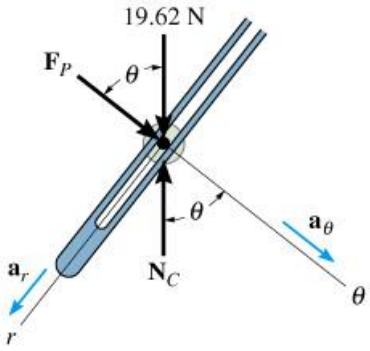
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 10/11

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4 ลูกกลิ้ง P มีมวล 2 kg. เคลื่อนที่ในร่องที่มีผิวราบเรียบดังแสดงในภาพ ถ้าความเร็วเชิงมุมของแขน OC มีค่าเท่ากับ 0.5 rad/s จงหาขนาดของแรงที่กระทำต่อแขน OC เมื่อมุม $\theta = 60^0$



(a)



(b)

วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่ในระบบพิกัดทรงกระบอก

$$\Sigma F_r = ma_r \quad \Rightarrow \quad 19.62 \sin\theta - N_C \sin\theta = 2a_r \qquad \ldots(1)$$

$$\Sigma F_\theta = ma_\theta \quad \Rightarrow \quad 19.62 \cos\theta + F_P - N_C \cos\theta = 2a_\theta \qquad \ldots(2)$$

และจากภาพจะได้ $r = 0.4/\sin\theta = 0.4 \csc\theta$ …(3)

ดังนั้น $\dot{r} = -0.2 \csc\theta \cot\theta$ …(4)

$\ddot{r} = 0.1 \csc\theta (\cot^2\theta + \csc^2\theta)$ …(5)

และจาก $\dot{\theta} = 0.5$ …(6)

ดังนั้น $\ddot{\theta} = 0$ …(7)

จากการแทนค่า จะได้ $r = 0.462$, $\dot{r} = -0.133$, $\ddot{r} = 0.192$

ดังนั้น $a_r = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770$

$a_\theta = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133$

แทนค่า a_r และ a_θ ลงในสมการที่ (1) และ (2)

จะได้ $N_C = 19.4$ N และ $F_P = -0.356$ N **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 11/15

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 ชายคนหนึ่งมีมวล 75 kg ยืนอยู่บนเครื่องชั่งสปริงในลิฟต์ ในช่วง 3 วินาทีแรกของการเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่ง ความตึงในสายเคเบิ้ลเท่ากับ 8,300 N จงอ่านค่า R ซึ่งอ่านได้จากหน้าปัดของเครื่องชั่งในช่วงเวลาดังกล่าว และความเร็วของลิฟต์ เมื่อสิ้นสุดวินาทีที่ 3 กำหนดให้มวลของลิฟต์ ชายคนดังกล่าวและเครื่องชั่งรวมกันเท่ากับ 750 kg

ตอบ. $R = 830\ \text{N}, v = 3.77\ \text{m/s}$

ข้อที่ 2 รถกระเช้ามวล 200 kg เคลื่อนที่ไปตามสายเคเบิ้ลด้วยแรงดึง $T = 2.4\ \text{kN}$ จงหาความเร่งของกระเช้าและแรงดึง P ที่สายเคเบิ้ลกระทำต่อล้อเลื่อน

ตอบ. $a = 7.30\ \text{m/s}^2, P = 2.73\ \text{kN}$

ข้อที่ 3 : ลูกตุ้มคอนกรีต A มวล 125 kg ถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งดังรูป ดึงท่อนซุงมวล 200 kg เคลื่อนที่ขึ้นตามแนวพื้นเอียง 30° สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างท่อนซุงกับพื้นเอียงเท่ากับ 0.5 จงหาความเร็วของท่อนซุงขณะที่ลูกตุ้มกระทบพื้นที่ B

ตอบ. $v_A = 4.62\ \text{m/s}$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 12/15

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : Collar มวล m เลื่อนไปตามเพลาในแนวดิ่งด้วยแรงกระทำ F ซึ่งมีขนาดคงที่ แต่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทาง ถ้า $\theta = kt$ โดย k เป็นค่าคงที่ และ Collar เริ่มเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่ง $\theta = 0$ จงหาขนาดของแรง F ที่จะทำให้ Collar หยุดนิ่งเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$

ตอบ. $F = \frac{mg\pi}{2k}$

ข้อที่ 5 : จงหาความเร่งในแนวดิ่งของมวล 150 kg ทั้งสองกรณี เมื่อไม่คิดความเสียดทานของมวลและรอก

ตอบ. (ก) $a = 1.40\ m/s^2$ (ข) $a = 3.27\ m/s^2$

ข้อที่ 6 : อนุภาคมวล 3 kg เคลื่อนที่ในแนวราบตามแนวแกน y ด้วยความเร็ว 4 m/s เมื่อถูกกระทำด้วยแรงลัพธ์ $F_y = 5 + 2t^2$ เมื่อ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของอนุภาคเมื่อ $t = 3s$

ตอบ. $v = 15\ m/s$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 13/15

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 7 : สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน ระหว่างพื้นรถกับห่อของเท่ากับ 0.30 จงหาระยะทางที่น้อยสุด s ที่จะหยุดรถบรรทุก จากอัตราเร็ว 70 km/h ด้วยความหน่วงคงที่ โดยไม่ทำให้ห่อของไถลไปข้างหน้า

ตอบ. s = 64.2 m

ข้อที่ 8 : วัตถุชิ้นเล็ก ๆ ถูกส่งจากสายพาน A ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $v_1 = 0.4\,m/s$ ผ่านพื้นเอียงยาว 2 m ถ้าสายพาน B มีอัตราเร็ว $v_2 = 1\,m/s$ และวัตถุเคลื่อนที่จากพื้นเอียงสู่สายพาน B โดยไม่เกิดการไถล จงหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ ระหว่างวัตถุและพื้นเอียง

ตอบ. μ = 0.553

ข้อที่ 9 :คานและกลไกเครื่องกว้านมีมวลรวมเท่ากับ 1,200 kg มีจุดศูนย์กลางมวลที่ G ถ้าความเร่งเริ่มต้น ของจุด P บนสายเคเบิ้ลมีค่า a = 6 m/s^2 จงหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A

ตอบ. F_A = 19.986 kN

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 14/15

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 10 : จงหาอัตราเร็วในการหมุน N เพื่อให้แขนของเครื่องเล่นกางออกเป็นมุม 60^{o} เมื่อไม่คิดมวลของแขนและถือว่า วัตถุเป็นอนุภาค

ตอบ. N = 10.65 rev/min

ข้อที่ 11 : ตัวเลื่อนเล็ก ๆ เคลื่อนที่ได้อิสระ ไปตามราวโค้งวงกลม AB โดยไม่มีความเสียดทาน ถ้าราวโค้งนี้หมุนรอบแกนดิ่ง OA ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ $\dot{\theta}$ จงหามุม β สำหรับตำแหน่งเสถียรของตัวเลื่อน

ตอบ. $\beta = \cos^{-1}\frac{g}{r\dot{\theta}^2}$

ข้อที่ 12 : อนุภาคมวล 2 kg เคลื่อนที่ในแนวระดับโดยมีพิกัดเชิงขั้วดังสมการ $r = 2t^3 - 3t + 4$ และ $\theta = 2\sin\frac{1}{2}\pi t$ เมื่อ r มีหน่วยเป็น m และ θ มีหน่วยเป็น rad และ t มีหน่วยเป็น s จงหาแรงลัพธ์ในแนวระดับที่กระทำต่ออนุภาคที่เวลา $t = 2\,s$

ตอบ. F = 348.7 N

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 158-170
- เอกสารหมายเลข 5 หน้าที่ 77
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 123-140
- เอกสารหมายเลข 9 หน้าที่ 126-127
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 106,116,128,138</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 6
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 6
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 6</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้ผู้เรียนตอบคำถามแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 7	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 3 จลนพลศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 1/18

ชื่อบทเรียน

3.2 งานและพลังงาน

จุดประสงค์การสอน

3.2 เข้าใจหลักการของงานและพลังงานได้ถูกต้อง

3.2.1 อธิบายความหมายของงานและพลังงาน

3.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนของอนุภาคที่โดยใช้สมการงานและพลังงาน

3.2.3 อธิบายหลักความถาวรของพลังงาน

3.2.4 อธิบายความหมายของกำลังงาน

3.2.5 อธิบายความหมายของประสิทธิภาพทางกล

3.2.6 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 2/18

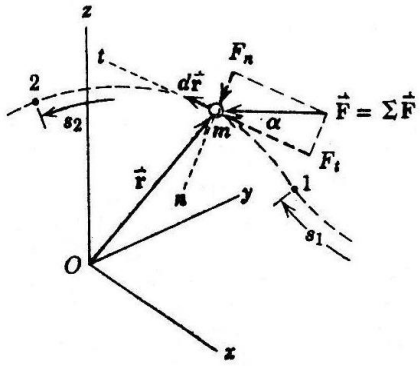
เนื้อหา

3.2 งานและพลังงาน

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราได้ใช้กฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ หาความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำต่ออนุภาคและของความเร่งที่เกิดขึ้น ความสัมพันธ์ดังกล่าว จะเป็นความสัมพันธ์ ณ. ที่ขณะเวลาใดเวลาหนึ่ง ถ้าต้องการทราบการเปลี่ยนแปลงของความเร็วและการขจัดของอนุภาคในช่วงของการเคลื่อนที่ใด ๆ เราสามารถหาได้จากการอินทิเกรทสมการการเคลื่อนที่เทียบกับเส้นทางการเคลื่อนที่ (การขจัด) หรือเทียบกับเวลา กล่าวคือ เราจะพิจารณาแรงลัพธ์ $\sum \vec{F}$ ซึ่งกระทำต่อเนื่อง จะได้สมการของงานและพลังงาน ถ้าเราอินทิเกรทแรงลัพธ์นั้นเทียบกับเวลา เราก็จะได้สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

งาน (work)

ก่อนอื่น เราจะพิจารณาถึงงานที่เกิดขึ้นในระบบเมื่อมีการเคลื่อนที่ ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น 2 ชนิด คือ งานของแรง และงานของโมเมนต์



รูปที่ 3.5 แสดงลักษณะของการเกิดงาน

งานของแรง : พิจารณาอนุภาคมวล m ซึ่งเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นประ $\vec{F}$ คือแรงลัพธ์ที่กระทำต่ออนุภาค $\vec{r}$ คือ เวกเตอร์ทางตำแหน่งของอนุภาค $d\vec{r}$ คือ การขจัดของอนุภาคเนื่องจากแรง $\vec{F}$ ในช่วงเวลาการเคลื่อนที่ dt ดังนั้น งานเนื่องจากแรง $\vec{F}$ (โดยใช้ Dot Product) คือ $du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ หรืออาจหาได้โดยใช้ขนาดของแรงคูณระยะการเคลื่อนที่ตามแนวแรง คือ

$$|du| = F_t |d\vec{r}| = F_t \, ds = (F\cos\alpha)\, ds$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 3/18

เนื้อหา

ในที่นี้ งานเนื่องจากแรงย่อย F_n เป็นศูนย์ เพราะอนุภาคไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวแรง F_n การพิจารณางานบวกและงานลบ ให้พิจารณาดังนี้

1. ถ้าใช้สมการ $du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ เครื่องหมายของงานจะเป็นไปตามผลของ Dot Product
2. ถ้าไม่ใช้สมการ $du = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ งานจะเป็นงานบวกเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปในทิศทางเดียวกันกับทิศทางของแรง และงานจะเป็นงานลบเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปในทิศตรงกันข้ามกับทิศทางของแรง

งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรง F ในช่วงการเคลื่อนที่จากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 2 คือ

$$U = \int du = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F_t ds$$

ในระบบ SI Unit งานมีหน่วยเป็น Joule (J) ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะเพื่อไม่ให้เกิดความสับสนระหว่างหน่วยของโมเมนต์ ซึ่งมีหน่วยเป็น (N. m)

งานของโมเมนต์ : พิจารณาจากรูปต่อไปนี้ โมเมนต์แรงคู่ควบ M เกิดจากแรงคู่ควบขนาด F กระทำในแนวแกน x ห่างกันเป็นระยะ 2r ทำให้จานกลมหมุนไปเป็นมุม $d\theta$ รอบแกน a - a

$$d\vec{\theta} = i\,d\theta_x + j\,d\theta_y + k\,d\theta_z$$

จะเห็นได้ว่า แรง F ไม่ได้ทำให้เกิดงานในส่วนของการหมุน $d\theta_x$ และ $d\theta_y$ แต่จะเกิดงานในส่วนการหมุนของ $d\theta_z$ นั่นคือ

$$du = 2Fr\,d\theta_z = M\,d\theta_z$$

$$du = \vec{M}.d\vec{\theta}$$

$$U = \int du = \int (M_x d\theta_x + M_y d\theta_y + M_z d\theta_z)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 4/18

เนื้อหา

งานและพลังงานจลน์ (Work and Kinetic Energy)

จากสมการ

$$U = \int \vec{F}.d\vec{r} = \int m\vec{a}.d\vec{r}$$

แต่

$\vec{a}.d\vec{r} = a_t\, ds$ และ $a_t\, ds = vdv$

เมื่อ

a_t คือ ความเร่งในแนวสัมผัสกับทางเดิน

ds คือ ขนาดของ $d\vec{r}$

(เนื่องจากความเร็วของอนุภาคจะอยู่ในแนวสัมผัสกับทางเดินเสมอ ดังนั้น $v_t = v$)

ดังนั้น

$$U = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

กำหนดให้พลังงานจลน์ (Kinetic Energy , KE) ของอนุภาค คือ

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

ดังนั้น $U = \Delta T$

กล่าวคือ “งานทั้งหมดซึ่งเกิดจากแรงภายนอกที่กระทำต่ออนุภาค ในช่วงการเคลื่อนที่ใด ๆ จะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของอนุภาคในช่วงการเคลื่อนที่นั้น”

ข้อดีของการใช้สมการงานและพลังงานจลน์ ในการแก้ปัญหาคือ

1. การหาความเร็วของอนุภาคที่ขณะใดขณะหนึ่งของการเคลื่อนที่ เราไม่จำเป็นต้องทราบค่าความเร่งของอนุภาคในช่วงการเคลื่อนที่นั้น
2. ปริมาณในสมการของงานและพลังงานเป็นปริมาณสเกลาร์ซึ่งสามารถบวกลบกันตามเครื่องหมายได้โดยตรง
3. แรงที่นำมาเกี่ยวข้องกับการคำนวณ จะใช้เฉพาะแรงที่ทำให้เกิดงาน (ซึ่งเรียกว่า Active Force) เท่านั้น แรงอื่น ๆ ที่ไม่ทำให้เกิดงานเราจึงไม่จำเป็นต้องทราบค่า

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 5/18

เนื้อหา

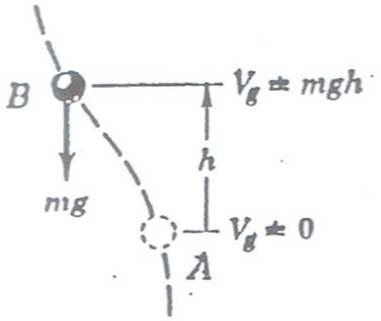
พลังงานศักย์ (Potential Energy)

พลังงานศักย์ แบ่งออกได้เป็น 2 อย่าง คือ

1. พลังงานศักย์โน้มถ่วง (Gravitational Potential Energy , V_g)

2. พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (Elastic Potential Energy , V_e)

พลังงานศักย์โน้มถ่วง (Gravitational Potential Energy , V_g)



รูปที่ 3.6 ทิศทางการเคลื่อนที่ของอนุภาค

ในกรณีของการเคลื่อนที่ ซึ่งเกิดขึ้นใกล้กับผิวโลก ค่า g ถือว่ามีค่าคงที่ ดังนั้น อนุภาคมวล m จะมีแรงเนื่องจากความโน้มถ่วง คือ $F = W = mg$ ถ้ากำหนดให้อนุภาคที่ตำแหน่ง A อยู่ในระดับที่มีค่า

$V_g = 0$ (Datum) เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ไปยังตำแหน่ง B ซึ่งอยู่สูงขึ้นไปเป็นระยะ h งานที่เกิดจากแรง W คือ $U_W = -mgh$ และอนุภาคที่ตำแหน่ง B จะมีพลังงานศักย์เพิ่มขึ้นเป็น $V_g = +mgh$ และการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง $\Delta V_g = +mgh - 0 = +mgh$ เห็นได้ว่า ΔV_g และ U_W จะมีขนาดเท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม

นั่นคือ

$$U_W = -\Delta V_g \quad \text{หรือ} \quad \int dU_W = -\Delta V_g$$

ดังนั้น ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่งสูงจาก Datum เป็นระยะ h_1 ไปยังตำแหน่งสูงจาก Datum เป็นระยะ h_2 จะได้

$$U_W = -\Delta V_g = -mg(h_2 - h_1) = -mg\Delta h$$

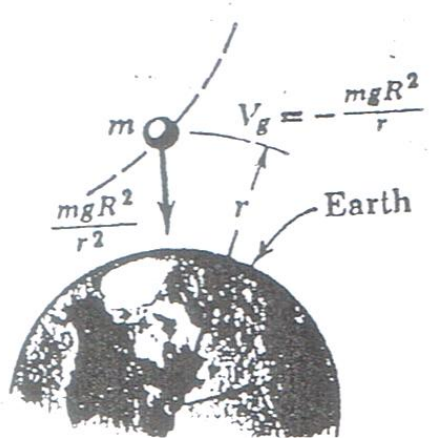
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 6/18

เนื้อหา

ในกรณีที่มีการเปลี่ยนแปลงระดับความสูงจากผิวโลกมาแรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก คือ $F = W = k\frac{m\,m_o}{r^2} = mg\frac{R^2}{r^2}$ จะมีค่าไม่คงที่ โดย g คือค่าความโน้มถ่วงที่ผิวโลกมีค่าเท่ากับ $9.81\ \frac{m}{s^2}$

งานที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงความโน้มถ่วง W เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากระยะ r ไปยัง r' ($r' > r$) คือ

$$U = -\int_{r}^{r'} mg\,R^2\frac{dr}{dt} = -mg\,R^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)$$



นั่นคือ

$$U = mg\,R^2\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$$

และจากสมการ $U = -\Delta V_g$

$$mg\,R^2\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = -(V_g' - V_g)$$

โดยทั่วไปจะกำหนดให้ Datum ซึ่งมีค่า $V_g = 0$ อยู่ที่ตำแหน่ง $r' = \infty$ ดังนั้นที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางของโลกเป็นระยะ r อนุภาคจะมีพลังงานศักย์โน้มถ่วง $V_g = -mg\frac{R^2}{r}$

ดังนั้น ในกรณีที่เราคิดงานของแรงเนื่องจากความโน้มถ่วง W ของอนุภาคในรูปของพลังงานศักย์โน้มถ่วง V_g จะได้ว่า

$$U = \Delta T + \Delta V_g$$

เมื่อ U คือ งานทั้งหมดเนื่องจากแรงภายนอก (ยกเว้นแรงความโน้มถ่วง W)

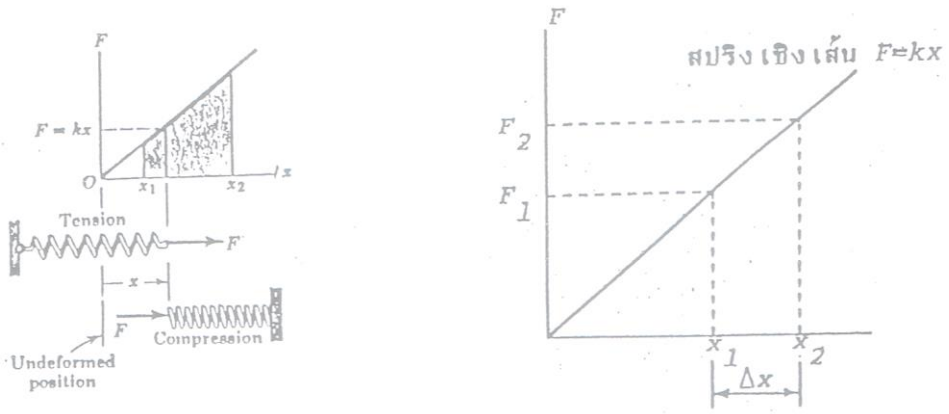
ΔT คือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์

ΔV_g คือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 7/18

เนื้อหา

พลังงานศักย์ยืดหยุ่น(Elastic Potential Energy , V_e)



รูปที่ 3.7 การเกิดพลังงานศักย์ยืดหยุ่น

ในระบบที่มีชิ้นส่วนยืดหยุ่น (Elastic Member) เช่น Linear Elastic Spring ระยะการยืดหรือหดของสปริง จะขึ้นอยู่กับค่า Spring Constant, k และแรงที่จะทำให้สปริงยืดหรือหดจากความยาวปกติเป็นระยะ x คือ $F = kx$

แรงที่สปริงกระทำต่อระบบ (มวล) คือ $F_s = kx$ และงานที่เกิดขึ้นในการยืดสปริงจากระยะ x_1 เป็น x_2 คือ

$$U_s = -\int_{x_1}^{x_2} F_S\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$$

งานนี้จะถูกสะสมเป็นพลังงานอยู่ในสปริง เรียกว่าพลังงานศักย์ยืดหยุ่น $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของการเคลื่อนที่นี้ คือ $\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$ นั่นคือ $U_s = -\Delta V_e$

ดังนั้น ในกรณีที่เราคิดงานของแรงเนื่องจากสปริง (หรือวัตถุยืดหยุ่น) ที่กระทำต่ออนุภาคหรือระบบในรูปของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น V_e จะได้ว่า

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$$

เมื่อ

U คือ งานเนื่องจากแรงภายนอกทั้งหมด ยกเว้นแรงความโน้มถ่วงและแรงเนื่องจากสปริง

ΔT คือ การเปลี่ยนแปลงของพลังงานจลน์

ΔV_g คือ การเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์โน้มถ่วง

ΔV_e คือ การเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์ยืดหยุ่น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 8/18

เนื้อหา

ข้อแนะนำ

ในการแก้ปัญหาโดยใช้สมการของงานและพลังงาน ควรใช้สมการ $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ เป็นหลัก จะสะดวกกว่า ทั้งนี้เพื่อหลีกเลี่ยงความสับสนระหว่างงานเนื่องจากแรงความโน้มถ่วงกับพลังงานศักย์โน้มถ่วง และงานเนื่องจากแรงของชิ้นส่วนที่ยืดหยุ่นกับพลังงานศักย์ยืดหยุ่น กล่าวคือถ้าใช้สมการ $U = \Delta T$ แรงความโน้มถ่วงและแรงของชิ้นส่วนยืดหยุ่นจะต้องคิดในรูปงาน

ถ้าใช้สมการ $U = \Delta T + \Delta V_g$ แรงของชิ้นส่วนที่ยืดหยุ่นยังคงคิดในรูปของงาน แต่แรงความโน้มถ่วงจะคิดในรูปของพลังงานศักย์โน้มถ่วง ดังนั้นเราจึงควรใช้สมการ $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$ ในการแก้ปัญหา แรงความโน้มถ่วงและแรงของชิ้นส่วนที่ยืดหยุ่น จะคิดในรูปของพลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานศักย์ยืดหยุ่นตามลำดับ การหาค่าการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์เมื่ออนุภาคหรือระบบเคลื่อนที่จากตำแหน่ง 1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 มีหลักง่าย ๆ ดังนี้

ขนาดของการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง $\left|V_g\right|$ คือ

$\left|V_g\right|$ = น้ำหนักของอนุภาคหรือระบบ (mg) คูณระยะห่างในแนวดิ่งของตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งที่ 2 (Δh)

$\left|V_g\right| = mg\,\Delta h$

โดย

$\Delta V_g = +mg\,\Delta h$ เมื่ออนุภาคหรือระบบเคลื่อนที่จากตำแหน่งที่ 1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 ซึ่งอยู่สูงกว่า

และ $\Delta V_g = -mg\,\Delta h$ เมื่ออนุภาคหรือระบบเคลื่อนที่จากตำแหน่งที่ 1 ไปยังตำแหน่งที่ 2 ซึ่งอยู่ต่ำกว่า

x_1 คือ ระยะยืดหรือหดของสปริงจากความยาวปกติ เมื่ออนุภาคหรือระบบอยู่ที่ตำแหน่งที่ 1

x_2 คือ ระยะยืดหรือหดของสปริงจากความยาวปกติ เมื่ออนุภาคหรือระบบอยู่ที่ตำแหน่งที่ 2

โดยมีข้อสังเกตว่า $\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2)$ หรือ $V_e = \frac{1}{2}kx^2$ จะใช้ได้เฉพาะในกรณีที่ชิ้นส่วนยืดหยุ่น เป็น Linear Elastic Spring ซึ่ง $F = kx$ เท่านั้น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 9/18

เนื้อหา

หลักความถาวรของพลังงาน (Conservation of Energy)

พิจารณาจากสมการต่อไปนี้

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = \Delta E$$

ในกรณีที่ไม่เกิดงานเนื่องจากแรงภายนอกที่กระทำต่ออนุภาค , $U = 0$ นั่นคือ

$$\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = \Delta E = 0$$

หรือ

$$E = T + V_g + V_e = \text{Constant}$$

กำลัง (Power)

กำลัง (Power) คือ ปริมาณงานต่อหนึ่งหน่วยเวลา มีหน่วยเป็น $\frac{J}{s} = \frac{N.m}{s} = W$ (watt) โดยเขียนให้อยู่ในรูปของสมการได้ดังนี้

$$P = \frac{dU}{dt} = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}.\vec{v}$$

หรือ

$$P = \frac{dU}{dt} = \vec{M}.\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M}.\omega$$

ประสิทธิภาพทางกล (Mechanical Efficiency , e_m)

$$e_m = \frac{P_{output}}{P_{input}}$$

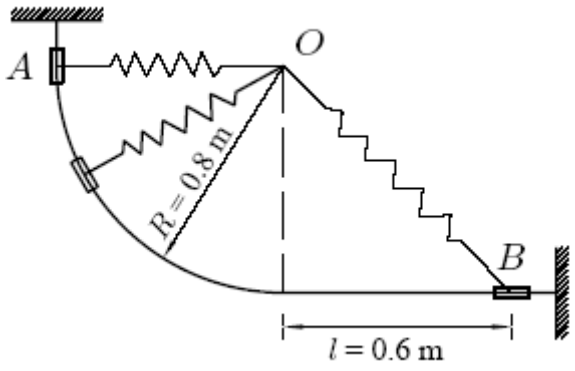
เมื่อรวมประสิทธิภาพการสูญเสียทางไฟฟ้า (Electrical Efficiency , e_e) และประสิทธิภาพของการสูญเสียทางเทอร์มอล (Thermal Efficiency , e_t) เข้าไปด้วย เราจะได้ประสิทธิภาพทั้งหมดของระบบ คือ

$$\text{Overall Efficiency}, e = e_m\, e_e\, e_t$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 10/18

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 ปลอกเลื่อน A มีมวล 3 kg สวมอยู่ในแกนโค้งที่มีรัศมีความโค้งเท่ากับ 0.8 m และถูกต่อเข้ากับสปริงดังแสดงในภาพ ถ้าสปริงมีความยาวปกติ $l_0 = 0.4$ m และมีค่านิจสปริง $k = 200$ N/m จงหาความเร็วของปลอกเลื่อน A เมื่อเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่ง B (ไม่คิดแรงเสียดทานระหว่างปลอกเลื่อน A กับแกนโค้ง)



วิธีทำ

พิจารณาที่จุด A

$T_A = (1/2)\, mV_A^2$

$V_g = mgR$

$V_e = (1/2)\, k\, (R - l_0)$

พิจารณาที่จุด B

$T_B = (1/2) mV_B^2$

$V_g = mg\,(0) = 0$

$V_e = (1/2)\, k\, (\sqrt{R^2 + l^2} - l_0^2)^2$

แทนค่าลงในสมการ

$$0 = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e$$

จะได้

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - 0) + (0 - mgR) + (\frac{1}{2}) k \left[\left(\sqrt{R^2 + l^2}\right) - l)^2 - (R - l_0)^2\right]$$

$$v_B^2 = 2gR + (\frac{k}{m}) \left[(R - l_0)^2 - (\sqrt{R^2 + l^2} - l_0)^2\right]$$

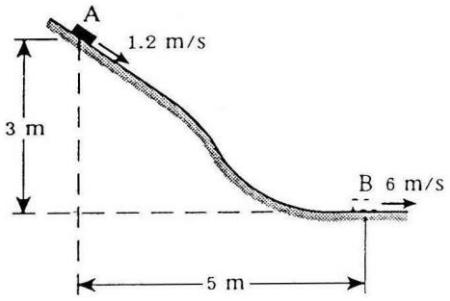
$$= 2(9.81)(0.8) + (200/3)[(0.4)^2 - (0.6)^2] = 2.36 \text{ m}$$

ดังนั้นความเร็วของปลอกเลื่อน A เมื่อเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่ง B ปลอกเลื่อน A จะมีความเร็วเท่ากับ $V_A = 1.54$ m/s **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 11/18

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 กล่อง A มีมวล 30 kg เลื่อนไถลลงมาตามทางโค้งในระนาบดิ่งดังรูป ถ้ากล่อง A มีความเร็ว 1.2 m/s เมื่อไถลลงมาตามแนวพื้นเอียงถึงจุด A และมีความเร็ว 6 m/s ที่จุด B จงคำนวณหางาน U_f ที่กระทำกับกล่อง A โดยความเสียดทานระหว่างการเคลื่อนที่จาก A ถึง B



<u>วิธีทำ</u>

จาก $U = \Delta T$

แทนค่า $30\,(9.81)\,3 + U_f = \frac{1}{2}\,(30)\,[6^2 - (1.2)^2]$

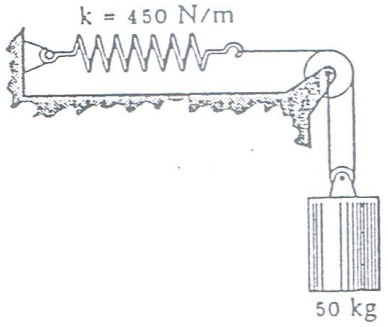
$\therefore \quad U_f = 518 - 883 \quad J$

$= -365 \quad J$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 12/18

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 ปล่อยทรงกระบอก 50 kg จากสภาพอยู่นิ่งในตำแหน่งที่สปริงอยู่ภายใต้แรงดึง 45 N จงคำนวณหาความเร็วของทรงกระบอกหลังจากที่ตกลงมา 150 mm และจงหาการขจัด δ ที่ลงมามากที่สุดของทรงกระบอก ไม่ต้องคิดมวลของรอกต่างๆ



วิธีทำ

$F = kx = 450\,x$

เมื่อ $F = 45N,\ x = 45/450 = 0.1\ m$

จาก $U = \Delta T$

แทนค่า

$$-\int_{y_1}^{y_2} 2F\,dy + 50(9.81)(y_2 - y_1) = \frac{1}{2}(50)(v^2 - 0)$$

ที่ $y_1 = \frac{0.1}{2} = 0.05$ m และ $y_2 = 0.150 + 0.50 = 0.20$ m

ซึ่ง $2F = 2(450)(2y)$

ดังนั้น $$-4(450)\frac{y^2}{2}\Big]_{0.05}^{0.20} + 50(9.81)(0.15) = \frac{50v^2}{2}$$

$$-33.75 + 73.58 = 25\,v^2$$

$$v^2 = 1.593$$

$$\therefore \quad v = 1.262 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

$\delta = y_{max} - y_1$ เมื่อ $\Delta T = 0$ และ $U = 0$

ดังนั้น $$-2(450)\,y^2\Big]_{0.05}^{\delta+0.05} + 50(9.81)\delta = 0$$

$$-900\left[(\delta + 0.05)^2 - (0.05)^2\right] + 50(9.81)\delta = 0$$

$$-900\left[\delta^2 + 0.1\delta\right] + 490.5\delta = 0$$

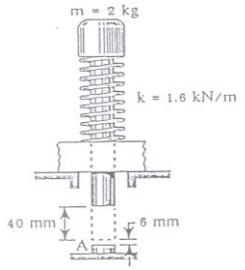
$$\delta = 0,\ 0.455 \text{ m}$$

นั่นคือ $\delta = 445$ mm **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 13/18

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4 ส่วนก้านในแนวดิ่งของลูกสูบมวล 2 kg จะอยู่ในตำแหน่งเส้นประเมื่ออยู่นิ่งในสภาพสมดุลกับสปริงที่มีความแข็งตึง k = 1.6 kN/m ปลายบนของสปริงเชื่อมติดกับลูกสูบ ปลายล่างเชื่อมติดกับแผ่นฐาน ถ้ายกลูกสูบขึ้น 40 mm เหนือตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อยจากสภาพหยุดนิ่ง จงคำนวณหาความเร็ว v ขณะที่กระทบปุ่ม A ไม่ต้องคิดความเสียดทาน



รูปภาพ 3.111

<u>วิธีทำ</u>

$$F = k\,x = (1.6 \times 13^3)(x)$$

เมื่อ x = ระยะยืดตัวของสปริง จากตำแหน่งของแรงศูนย์

$$2\,(9.81) = 1.6\,(10^3)\,|x_0|$$

$$\therefore \quad |x_0| = 12.26\,(10^{-3})\ \text{m}$$

จาก $\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$

$$\Delta V_g = -2\,(9.81)(40+6)(10^{-3}) = -0.9025\ \text{J}$$

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2}(1.6\times10^3)[(0.01226+0.006)^2 - (0.040-0.01266)^2]$$

$$= \frac{1}{2}(1.6\times10^3)(0.3335 - 0.7694)\,10^{-3} = -0.3487\ \text{J}$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,2\,v^2 = v^2$$

ดังนั้น $-0.9025 - 0.3485 + v^2 = 0$

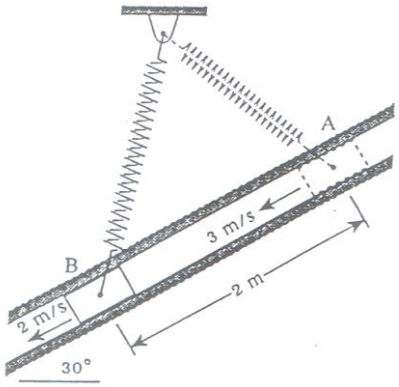
$$v^2 = 1.251$$

$$\therefore \quad v = 1.119\ \text{m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 14/18

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 กล่อง 4 kg มีความเร็ว 3 m/s ที่ A เคลื่อนไถลลงตามแนวพื้นเอียง ถึงจุด B มีความเร็ว 2 m/s สปริงที่ยึดติดกับกล่องมีความแข็งตึง เท่ากับ 120 N/m โดยยืดออก 0.6 m ที่ A และ 1.0 m ที่ B จงคำนวณหางานที่กระทำโดยความเสียดทานระหว่าง A กับ B และ จงหาพลังงานที่สูญเสียไป



วิธีทำ

จาก $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e$

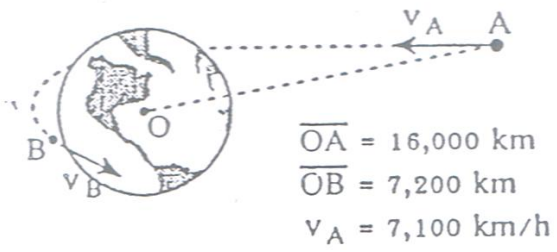
$\Delta T = \frac{1}{2}4(2^2 - 3^2) = -10$ J

$\Delta V_g = 4(9.81)(-2\sin 30^\circ) = -39.24$ J

$\Delta V_e = \frac{1}{2}(120)[(1.0)^2 - (0.6)^2] = 38.40$ J

$\therefore \quad U = -10 - 39.24 + 38.40 = -10.84$ J (สูญเสีย) **ตอบ**

ตัวอย่างที่ 6 แคปซูลอวกาศเดินทางกลับสู่โลกด้วยความเร็วสัมบูรณ์ 7,100 km/h ที่จุด A ซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางของโลก 16,000 km จงหาความเร็วสัมบูรณ์ของแคปซูลเมื่อถึงจุด B ซึ่งอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางโลก 7,200 km วิถีโคจรระหว่างสองจุดนี้อยู่นอกอิทธิพลของบรรยากาศโลก



วิธีทำ

จาก $\Delta T + \Delta V_g = 0$

และ $\Delta V_g = -\frac{mgR^2}{r}$

ดังนั้น $\frac{1}{2}m[v_B^2 - (7{,}100)^2] = 9.81\,(10^{-3})(3{,}600)^2\, m\,(6{,}370)^2(\frac{1}{7{,}200} - \frac{1}{16{,}000})$

$\frac{1}{2}v_B^2 - 25.2\,(10^6) = 394(10^6)$

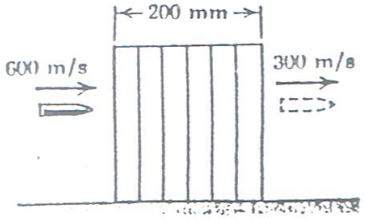
$\therefore \quad v_B = 29{,}000$ km/h **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 15/18

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

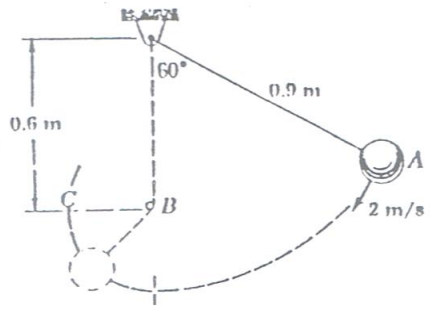
ข้อที่ 1 : ลูกปืนมวล 60 g วิ่งผ่านทะลุแผ่นไม้หนา 200 mm ถ้าลูกปืนเข้ากระทบแผ่นไม้ด้วยความเร็ว 600 m/s และทะลุออกด้วยความเร็ว 300 m/s จงหาแรงเสียดทานเฉลี่ยของแผ่นไม้

ตอบ. R = 40,500 N = 40.5 kN



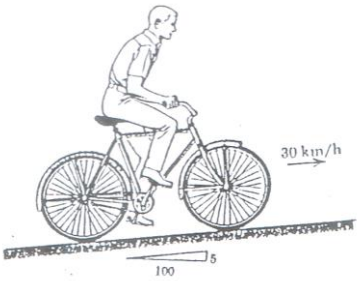
ข้อที่ 2. ลูกบอลถูกปล่อยจากตำแหน่ง A ด้วยความเร็ว 2 m/s ให้แกว่งไปบนระนาบดิ่งที่จุดต่ำสุด เส้นเชือกจะกระทบหลัก B และลูกบอลจะเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นประ จงหาความเร็ว v_C ของลูกบอลที่ตำแหน่ง C

ตอบ. v_C = 2.63 m/s



ข้อที่ 3. ชายคนหนึ่งและจักรยานมีมวลรวมกันเท่ากับ 90 kg จงหากำลัง P ของชายคนนี้ในการขี่จักรยานขึ้นทางลาด 5 % ด้วยอัตราเร็วคงที่ 30 km/hr

ตอบ. P = 367.1 W

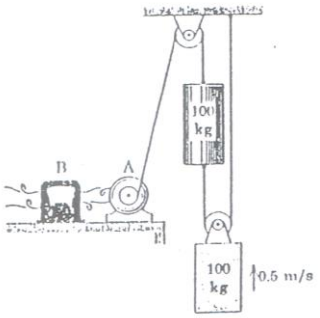


ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 15/18

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

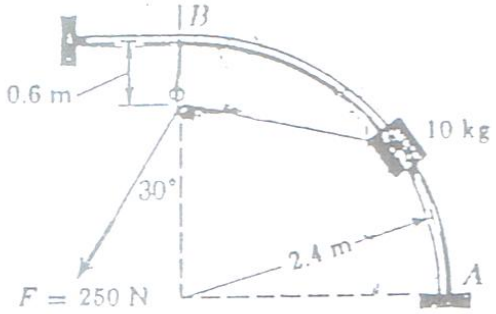
ข้อที่ 4 : มอเตอร์ A ที่ใช้กว้านมวล 100 kg จำนวน 2 ชิ้น ดังรูป ถ้ามวลชิ้นล่างถูกดึงขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่ 0.5 m/s และวัตต์มิเตอร์ B อ่านค่าได้ 1.6 kW จงหาประสิทธิภาพรวมทางไฟฟ้าและทางกลของระบบ

ตอบ. $e = \frac{1,471.5}{1,600} = 0.92$



ข้อที่ 5 : วัตถุมวล 10 kg เคลื่อนที่ได้อิสระบนราววงกลม ถ้าวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จาก A โดยแรงกระทำคงที่ 250 N บนสายเคเบิ้ล จงหาความเร็วของ v ของวัตถุ เมื่อเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่ง B

ตอบ. $v_c = 8.54$ m/s



ข้อที่ 6 : ตัวเลื่อน A มีมวล 10 kg เคลื่อนที่ขึ้นไปตามรางโดยไม่มีความเสียดทาน สปริงที่ยึดอยู่มีค่า k = 60 N/m และยืดอยู่เป็นระยะ 0.6 m ที่ตำแหน่ง A ซึ่งตัวเลื่อนถูกปล่อยจากสภาวะหยุดนิ่ง แรงกระทำ 250 N มีค่าคงที่และไม่คิดแรงเสียดทานที่รอก จงหาความเร็วของตัวเลื่อนขณะผ่านจุด C

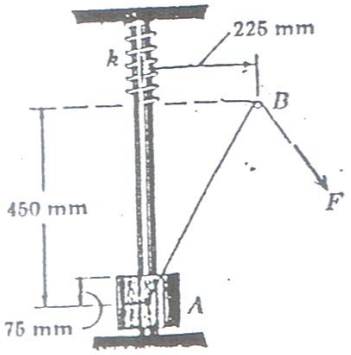
ตอบ. v = 0.974 m/s

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 15/18

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

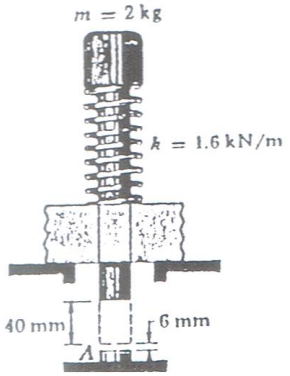
ข้อที่ 7 : ปลอก A มีมวล 7 kg เลื่อนขึ้นลงบนเพลาโดยไม่มีความเสียดทาน ปลอกถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งที่ด้านล่างของเพลา ให้เคลื่อนที่ขึ้นด้วยแรง $F = 200\,N$ จงหาค่า k ของสปริงถ้าระยะกดของสปริงถูกจำกัดให้เท่ากับ $75\,mm$ โดยตำแหน่งของรอกเล็ก ๆ นั้นคงที่

ตอบ. k = 8,790 N/m



ข้อที่ 8 : ปลายของก้านเจาะซึ่งมีมวล 2 kg จะอยู่ในตำแหน่งเส้นประเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลบนสปริงที่มีค่า $k = 1.6$ kN/m ปลายด้านบนของสปริงเชื่อมติดกับก้านเจาะและปลายด้านล่างเชื่อมติดกับแผ่นฐาน ถ้าก้านเจาะถูกดึงขึ้นเป็นระยะ $40\ mm$ เหนือตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อยจากสภาวะหยุดนิ่ง จงหาความเร็วของก้านเจาะ เมื่อกระทบกับแป้น A กำหนดให้ไม่คิดความเสียดทานในระบบ

ตอบ. v = 1.119 m/s



<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 206-209,215-238
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 74-79
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 161,181-182,152-153
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 153-169
- เอกสารหมายเลข 9 หน้าที่ 181</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 7
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 7
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 7</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้ผู้เรียนตอบคำถามแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 8	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 3 จลนพลศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 1/12

ชื่อบทเรียน

3.3 อิมพัลส์และโมเมนตัม

จุดประสงค์การสอน

3.3 เข้าใจหลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัมได้ถูกต้อง

3.3.1 อธิบายความหมายของอิมพัลส์และโมเมนตัม

3.3.2 อธิบายสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น

3.3.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้น

3.3.4 อธิบายสมการอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงมุม

3.3.5 อธิบายหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงมุม

3.3.6 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

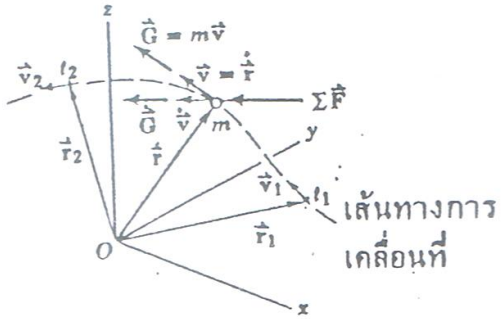
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 2/12

เนื้อหา

3.3 อิมพัลส์และโมเมนตัม

หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัมนั้น เป็นการพิจารณาผลของแรงกระทำที่มีต่อการเคลื่อนที่ของอนุภาค โดยยึดเอาช่วงเวลาที่แรงกระทำเป็นหลัก

1) อิมพัลส์เชิงเส้นและโมเมนตัมเชิงเส้น



รูปที่ 3.8 อิมพัลส์เชิงเส้นและโมเมนตัมเชิงเส้น

อนุภาคมวล m เคลื่อนที่ในระวางที่ (Space) ความเร็วของอนุภาค คือ $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ ในทิศทางสัมผัสกับทางเดิน แรงลัพธ์ $\sum\vec{F}$ กระทำต่ออนุภาคทำให้เกิดความเร่ง $\dot{\vec{v}}$ ในทิศทางเดียวกัน

จากสมการ

$$\Sigma F = m\dot{v} = \frac{d}{dt}(mv)$$

หรือ $\Sigma F = \dot{G}$ .....(1)

โดยที่ G = mv = โมเมนตัมเชิงเส้น (Linear momentum)

นั่นคือ แรงที่กระทำต่ออนุภาค จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้นของอนุภาค หากจะเขียนแยกในแต่ละแนวย่อย จะได้ว่า

$$\Sigma F_x = \dot{G}_x \ , \ \Sigma F_y = \dot{G}_y \ , \ \Sigma F_z = \dot{G}_z \text{ .....(2)}$$

สมการสำหรับแต่ละแกนจะนำไปใช้ได้โดยอิสระต่อกัน

จากสมการ (2) ถ้าทำการอินทิเกรด ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 จะได้ สมการดังต่อไปนี้

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F \, dt = G_2 - G_1 \text{.....(3)}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 3/12

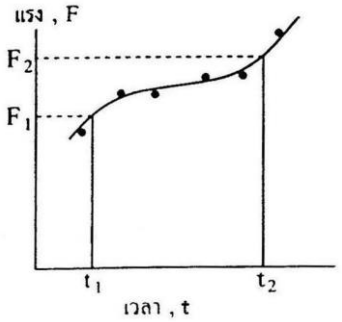
เนื้อหา

ผลคูณของแรงและเวลา เรียกว่า อิมพัลส์เชิงเส้น นั้นคือ “อิมพัลส์เชิงเส้นรวมที่มีผลต่อมวล m จะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้นของมวล m” สมการที่ (3) สำหรับแต่ละแกนในระบบพิกัดฉาก $x-y-z$ คือ

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x \, dt = (mv_x)_2 - (mv_x)_1$$

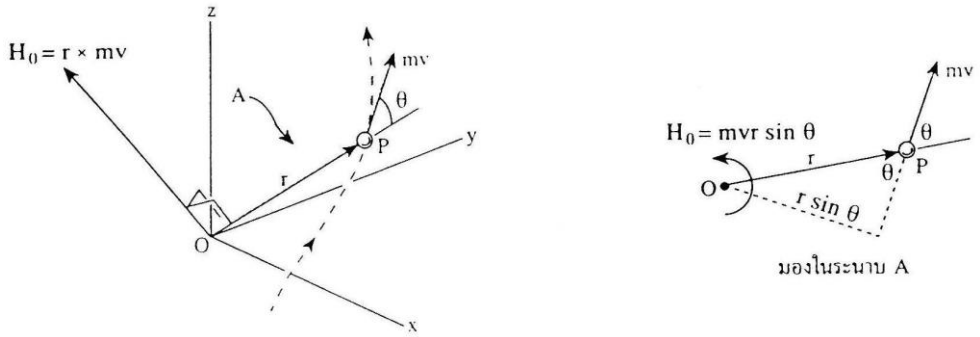
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y \, dt = (mv_y)_2 - (mv_y)_1 \quad \text{.....(4)}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_z \, dt = (mv_z)_2 - (mv_z)_1$$



ในกรณีที่แรงกระทำมีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามเวลา อิมพัลส์เชิงเส้นของแรงนี้ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 คือ $\int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ จะเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ $F-t$ ดังรูป

2) อิมพัลส์เชิงมุมและโมเมนตัมเชิงมุม



รูปที่ 3.9 อิมพัลส์เชิงมุมและโมเมนตัมเชิงมุม

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 4/12

เนื้อหา

อนุภาค P มวล m เคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งดังรูปที่ 3.9 อนุภาคที่มีเวกเตอร์ทางตำแหน่ง r เทียบกับจุด O คงที่ของระบบพิกัดฉาก $x-y-z$ และมีโมเมนตัมเชิงเส้นเป็น mv จะมีค่าโมเมนตัมเชิงมุมซึ่งเป็นค่าโมเมนต์ของโมเมนตัมเชิงเส้นรอบจุด O คือ

$$H_O = r \times mv \quad \text{.....(1)}$$

$$H_O = m \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

ดังนั้น

$$H_x = m(v_z y - v_y z)$$

$$H_y = m(v_x z - v_z x)$$

$$H_z = m(v_y x - v_x y)$$

โมเมนตัมเชิงมุมมีหน่วย N.m.s มีทิศทางตามกฎมือขวา เมื่อพิจารณาโมเมนต์ของแรงลัพธ์ ΣF รอบจุด O จะได้

$$\Sigma M_O = r \times \Sigma F = r \times mv$$

และเมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสมการ (1)

$$\dot{H}_O = \dot{r} \times mv + r \times m\dot{v}$$

แต่

$$\dot{r} \times mv = v \times m\dot{v} = 0$$

$$\dot{H}_O = r \times m\dot{v}$$

ดังนั้น

$$\Sigma M_O = \dot{H}_O \quad \text{.....(2)}$$

สมการที่ (2) กล่าวว่า “โมเมนต์รวมรอบจุด O ของแรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคมวล m จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด O นั้น”

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 5/12

เนื้อหา

สมการที่ (2) สำหรับแต่ละแกนในระบบพิกัดฉาก $x-y-z$ คือ

$$\sum M_{OX} = \dot{H}_{OX} \ , \sum M_{Oy} = \dot{H}_{Oy} \ , \sum M_{OZ} = \dot{H}_{OZ} \quad ...(3)$$

เมื่อพิจารณาถึงช่วงระยะเวลาการกระทำของโมเมนต์รวมที่มีผลต่อโมเมนตัมเชิงมุมในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 จะได้

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum M_O dt = H_{O2} - H_{O1} \quad .....(4)$$

เมื่อ

$$H_{O2} = r_2 \times mv_2$$

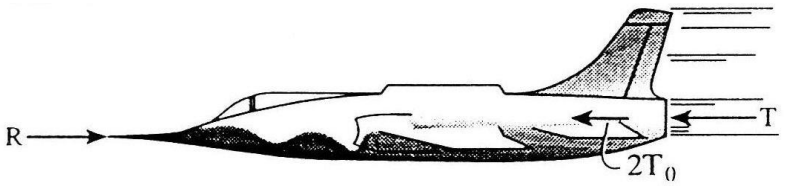
$$H_{O1} = r_1 \times mv_1$$

ผลคูณของโมเมนต์และเวลา เรียกว่า อิมพัลส์เชิงมุม นั้นคือ “อิมพัลส์เชิงมุมรวมรอบจุด O ที่มีต่อมวล m จะเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด O ของมวล m”

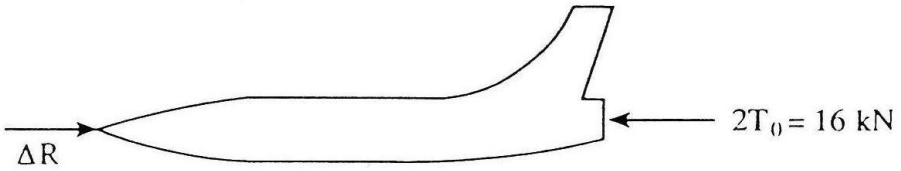
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 6/12

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 เครื่องบินไอพ่นมวล 10 Mg บินตามแนวราบด้วยอัตราเร็วคงที่ 1,000 km/h ภายใต้แรงผลักดันT ของเครื่องจักรและแรงต้านทาน R ของอากาศในทิศตรงข้าม นักบินจุดไฟเครื่องยนต์จรวด 2 หัว ซึ่งแต่ละหัวให้แรงผลักดัน 8 kN เป็นเวลา 9 s ถ้าความเร็วของเครื่องบินขณะบินตามแนวราบเท่ากับ 1,050 km/h ที่ปลายวินาทีที่ 9 จงคำนวณหาความต้านทานของอากาศที่เพิ่มขึ้น ΔR เฉลี่ยตามเวลาโดยไม่คิดมวลของเชื้อเพลิงจรวดเมื่อเทียบกับเครื่องบิน



<u>วิธีทำ</u>



จาก $\int \Sigma F\, dt = m\Delta v$

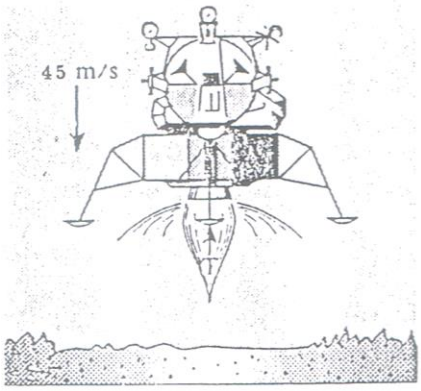
แทนค่า $(16{,}000 - \Delta R) = 10{,}000\,(1{,}050 - 1{,}000)/3.6$

$\Delta R = 568$ N **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 7/12

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 ยานลูนาร์มวล 200 kg ติดตั้งพร้อมจรวดถอยหลังซึ่งมีแรงผลักดันขึ้น (T) เท่ากับ 18 kN ในช่วงเวลา 10 s ถ้ายานลูนาร์อยู่เหนือผิวดวงจันทร์ 150 m และกำลังลงจอดที่อัตรา 45 m/s จงหาเวลา t ที่ใช้ลดอัตราลงจอดเหลือ 1.5 m/s เมื่อความเร่งเนื่องจากแรงดึงดูดใกล้ผิวดวงจันทร์มีค่าเท่ากับ 1.62 m/s^2



<u>วิธีทำ</u>

$$mg = 200\,(1.62) = 324\ N$$

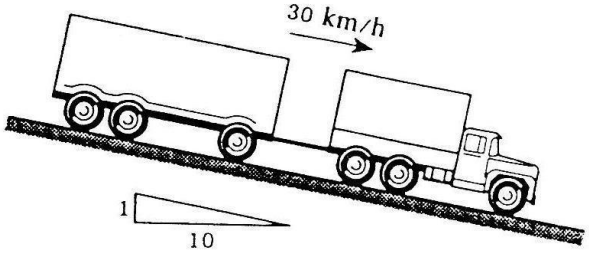
$$T = 18{,}000/10 = 1{,}800\ N$$

จาก $\int \Sigma F_y\, dt = m\Delta v$

แทนค่า $(324 - 1{,}800)\, t = 200\,(1.5 - 45)$

$$\therefore\ t = 5.89\ s$$ **ตอบ**

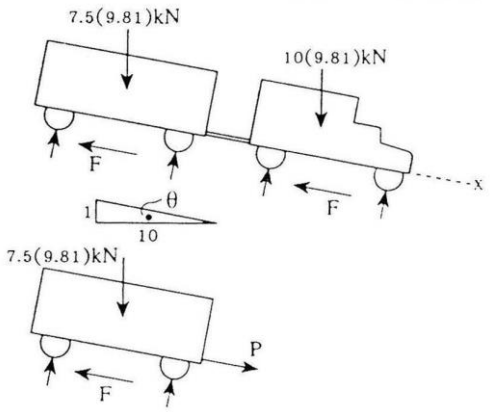
ตัวอย่างที่ 3 ระบบเบรคไฮดรอลิกสำหรับรถบรรทุกและรถพ่วงถูกติดตั้งให้เท่ากับแรงเบรคสำหรับแต่ละคัน ถ้าเบรคสม่ำเสมอเป็นเวลา 5 s เพื่อหยุดจากอัตราเร็ว 30 km/h ตามทางลาดลง 10 เปอร์เซ็นต์ จงหาแรง P ในข้อต่อระหว่างรถพ่วงกับรถบรรทุกมวลของรถบรรทุก 10 Mg และมวลของรถพ่วง 7.5 Mg



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 8/12

เนื้อหา

<u>วิธีทำ</u>



$$\theta = \tan^{-1} 0.1 = 5.71^{\circ}$$

$$\sin\theta = 0.0995$$

$$\text{จาก } \int \Sigma F_x \, dt = m\Delta v_x$$

$$[(10 + 7.5)\, 9.81\, (10^3)\, (0.0995) - 2F]5 = (10 + 7.5)\, (0 - 30/3.6)\, 10^3$$

$$10\ F = 231{,}200$$

$$\therefore\ F = 23{,}120\ N$$

$$\text{ที่รถพ่วง , จาก } \int \Sigma F_x \, dt = m\Delta v_x$$

$$[(7.5\ \ 9.81)\, 10^3\, (0.0995) - 23{,}120 + P]5 = 7.5\, (10^3)\, (-30/3.6)$$

$$5\ P = 16.52\, (10^3)$$

$$\therefore\ P = 3.30\, (10^3)$$

$$\text{หรือ } P = 3.30\ kN$$

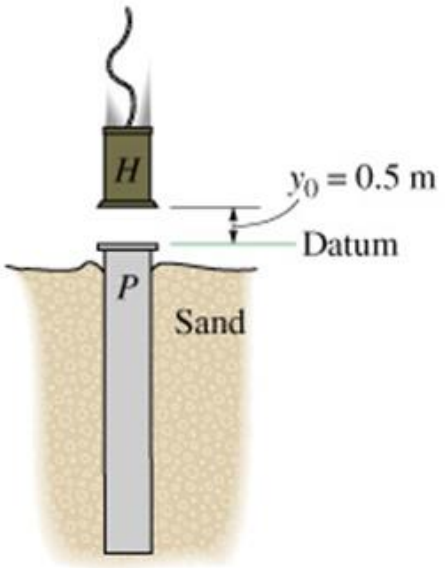
ตอบ

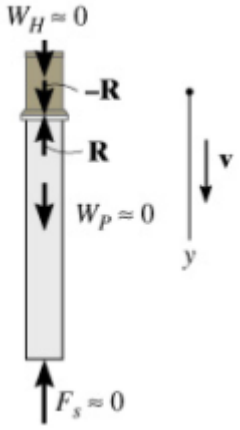
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 9/12

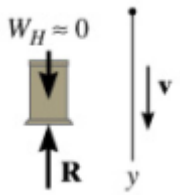
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3

เสาเข็มอันหนึ่ง(P) มีมวล 800 kg. ถูกกระแทกโดยตุ้มน้ำหนัก (H) ซึ่งมีมวล 300 kg. ในทิศทางแสดงในภาพ โดยระยะห่างระหว่างตุ้มน้ำหนักกับเสาเข็มก่อนที่จะเกิดการกระแทกเท่ากับ 0.5 m. และหลังจากเกิดกระแทกระหว่างตุ้มน้ำหนักกับเสาเข็มแล้วปรากฏว่าตุ้มน้ำหนักไม่มีการกระดอนขึ้น







วิธีทำ

1) จากสมการการอนุรักพลังงาน

$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$

แทนค่า

$$\frac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \frac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$0 + 300(9.81\ N)(0.5\ m) = (1/2)(30\ kg.)(V_H)_1^2 + 0$

ดังนั้น $(V_H)_1 = 3.13$ m/s

นั่นหมายความว่าความเร็วของลูกตุ้มก่อนที่จะเกิดการกระแทกเท่ากับ 3.13 m/s **ตอบ**

1) หาความเร็วของลูกตุ้มและเสาเข็มซึ่งมีการเคลื่อนที่ไปพร้อมกันหลังการกระแทก

นั่นคือ $(V_H)_2 = (V_P)_2 = (V)_2$

$$(+\downarrow)\ m_H(V_H)_1 + m_P(V_P)_1 = m_H V_2 + m_P V_2$$

แทนค่า

$(300\ kg)(3.13\ m/s) + 0 = (300\ kg)(V_2) + (800\ kg)V_2$

ดังนั้น $V_2 = 0.854$ m/s.

2) หาขนาดของ Impulse จาก

$$(+\downarrow)\ m_H(V_H)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y dt = m_H(V_H)_2$$

แทนค่า

$(300\ kg.)(3.13\ m/s) - \int R\,dt = (300\ kg)(0.8457\ m/s)$

ดังนั้น $\int R\,dt = 683$ N.s

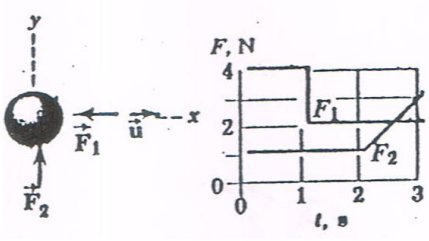
ตอบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 10/12

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : อนุภาคมวล 0.5 kg เคลื่อนที่ในแนวระดับ และมีความเร็ว $u = 10$ m/s ในทิศทาง x ที่เวลา $t = 0$ แรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ มากระทำต่ออนุภาค โดยมีขนาดแปรผันดังกราฟ จงหาความเร็วของอนุภาคโดยมีขนาดแปรผันดังกราฟ จงหาความเร็วของอนุภาคที่เวลา $t = 3$ s

ตอบ. $v = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ m/s

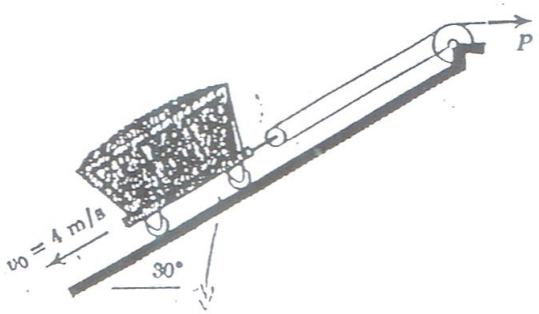


ข้อที่ 2 : เรือลำหนึ่งมีมวล 150×10^3 metrictons ถ้าสายเคเบิ้ลที่ผูกติดกับเรือลากจูงมีความตึง 200 kN จงหาระยะเวลาที่เรือจะมีความเร็วเป็น 1 knot จากสภาวะหยุดนิ่งสมมุติไม่คิดแรงเสียดทานอื่น ๆ (1 knot = 1.852 km/hr)

ตอบ. $\Delta t = 6.84$ min

ข้อที่ 3 : รถขนถ่ายมวลรวม 150 kg เคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียงด้วยความเร็ว 4 m/s เมื่อมีแรง P มากระทำที่เวลา $t = 0$ แรง P เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจนถึง 600 N ที่เวลา $t = 4$ s หลังจากนั้นจะมีค่าคงที่ จงหาเวลา t_1 ที่รถขนถ่ายจะกลับทิศทางการเคลื่อนที่ และความเร็วของรถขนถ่ายที่เวลา $t = 8$ s กำหนดให้รถขนถ่ายเป็นอนุภาค

ตอบ. $t = 4 + \Delta t = 4 + 2.46 = 6.46$ s , $v = 4.76$ m/s

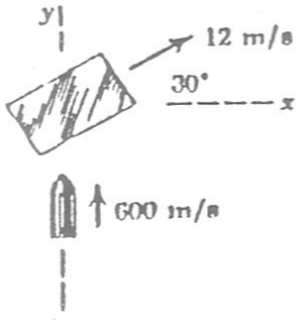


ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 11/12

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

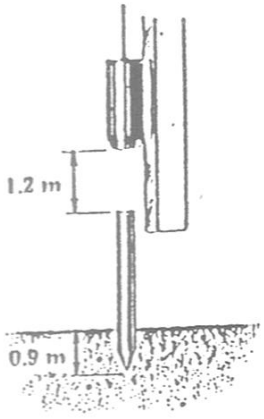
ข้อที่ 4 : ลูกปืนมวล 0.05 kg ความเร็ว 600 m/s เข้ากระทบวัตถุมวล 4 kg แล้วฝังอยู่ภายใน ถ้าวัตถุเคลื่อนที่อยู่บนระนาบระดับผิวเรียบ ด้วยความเร็ว 12 m/s ในทิศทางดังรูป ก่อนที่ลูกปืนจะมากระทบ จงหาความเร็ว v ของวัตถุและลูกปืน ที่เคลื่อนที่ไปด้วยกันหลังการกระทบ

ตอบ. $\theta = \tan^{-1}\frac{13.33}{10.26} = 52.41^{o}$



ข้อที่ 5 : ตุ้มน้ำหนักมวล 400 kg ถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งที่ระยะ 1.2 m ลงมากระทบเสาเข็มซึ่งมีมวล 250 kg ซึ่งฝังอยู่ในดินลึก 0.9 m หลังการกระทบ ตุ้มเหล็กจะเคลื่อนที่ไปพร้อมกับเสาเข็มโดยไม่กระดอนขึ้น จงหาความเร็ว v ของเสาเข็มและตุ้มน้ำหนักทันทีหลังการกระทบ

ตอบ. $v = 2.98$ m/s



<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 239-268
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 91-94
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 197
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 163-193,200-209
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 227</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 8
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 8
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 8</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้ผู้เรียนตอบคำถามแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 9	**ใบเตรียมการสอน**	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ		

สอบกลางภาคเรียน

สัปดาห์ที่ 10	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 3 จลนพลศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 1/17

ชื่อบทเรียน

3.4 การกระทบ

จุดประสงค์การสอน

3.4 เข้าใจหลักการของการกระทบได้ถูกต้อง

3.4.1 อธิบายความหมายของการกระทบ

3.4.2 อธิบายลักษณะของการกระทบแบบ Direct central Impact

3.4.3 อธิบายสมการการกระทบแบบ Direct central Impact

3.4.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การกระทบแบบ Direct central Impact

3.4.5 อธิบายลักษณะของการกระทบแบบ Oblique central Impact

3.4.6 อธิบายสมการการกระทบแบบ Oblique central Impact

3.4.7 อธิบายหลักการวิเคราะห์การกระทบแบบ Oblique central Impact

3.4.8 คำนวณการเคลื่อนที่ของอนุภาคโดยใช้หลักการของการกระทบ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 2/17

เนื้อหา

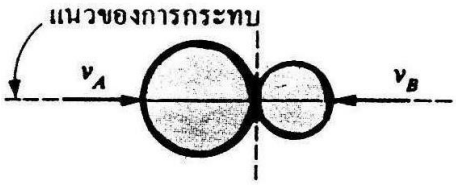
3.4 การกระทบ (Impact)

การกระทบ หมายถึง การปะทะกันระหว่างวัตถุคู่หนึ่ง ซึ่งแรงที่เกิดจากการปะทะมีค่ามากและจะเกิดขึ้นในช่วงเวลาที่สั้นมาก ทฤษฎีของการกระทบนี้ เดิมมีความยุ่งยากในการวิเคราะห์จากการทดลอง เนื่องจากช่วงเวลาที่เกิดขึ้นนั้นสั้นมากจนการวัดค่าต่าง ๆ กระทำไม่ได้ ในปัจจุบันนี้ด้วยความก้าวหน้าทางด้านเครื่องมือและอุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ ทำให้เราสามารถวัดค่าต่าง ๆ ในช่วงเวลาของการกระทบได้

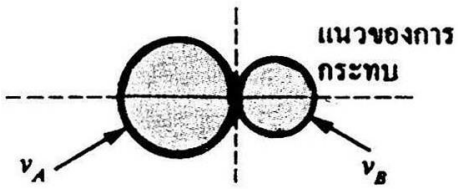
ในกรณีที่วัตถุ 2 ชิ้นกระทบกัน โดยเส้นตั้งฉากร่วม ซึ่งตั้งฉากกับแนวสัมผัสของวัตถุทั้งสอง เราเรียกว่า เส้นการกระทบ (Line of Impact) ถ้าจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุทั้งสองอยู่ในแนวเส้นตรงนี้ จะเรียกการกระทบแบบนี้ว่า การกระทบแบบ Central Impact แต่ถ้าจุดศูนย์กลางของมวลทั้งสอง มิได้อยู่ในแนวเส้นตรงนี้ จะเรียกการกระทบแบบนี้ว่า Eccentric Impact ในที่นี้เราจะทำการศึกษาเฉพาะการกระทบแบบ Central Impact เท่านั้น

การกระทบกันแบบ Central Impact แบ่งออกได้เป็นสองแบบ คือ

1. Direct Central Impact คือ การกระทบซึ่งวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่เข้ากระทบกันโดยมีความเร็วในการกระทบอยู่ในแนวเส้นการกระทบ



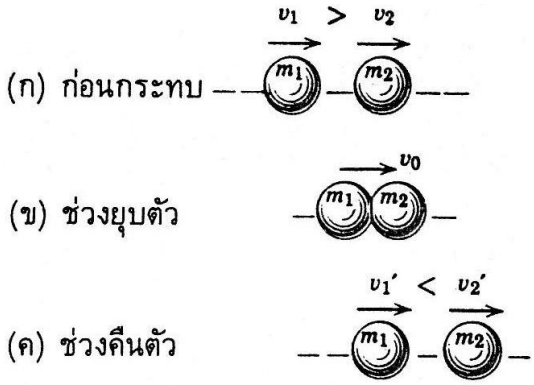
2. Oblique Central Impact คือ การกระทบซึ่งวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่เข้ากระทบกันโดยความเร็วในการกระทบไม่อยู่ในแนวเส้นการกระทบ



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 3/17

เนื้อหา

1. การกระทบแบบ Direct central impact



รูปที่ 3.10 ลักษณะของการกระทบแบบ Direct Central Impact

จากรูปเป็นการกระทบของวัตถุแบบ Direct Central Impact โดยที่ทรงกลมทั้งสองเคลื่อนที่เคลื่อนที่เข้ากระทบกันโดยมีความเร็วในการกระทบอยู่ในแนวเส้นการกระทบดังรูป (ก) ทรงกลมมวล m_1 และ m_2 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว v_1 และ v_2 ตามลำดับ โดย $v_1 > v_2$ เมื่อการปะทะเกิดขึ้น ทรงกลมทั้งสองจะยุบตัวและมีความเร็วร่วมเป็น v_0 เมื่อการยุบตัวมีค่าสูงสุดดังรูป(ข) เรียกว่า “ช่วงยุบตัว” หลังจากนั้นทรงกลมจะเริ่มคืนตัวจนมีขนาดเท่าเดิมและแยกจากกันด้วยความเร็ว v_1' และ v_2' ตามลำดับ ดังรูป (ค) เรียกว่า “ช่วงคืนตัว”

เนื่องจากแรงที่ผิวสัมผัสของวัตถุทั้งสองจะมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้าม ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบ (ทรงกลมทั้งสอง) ในแนวการกระทบจึงมีค่าคงที่ $\Delta G = 0$

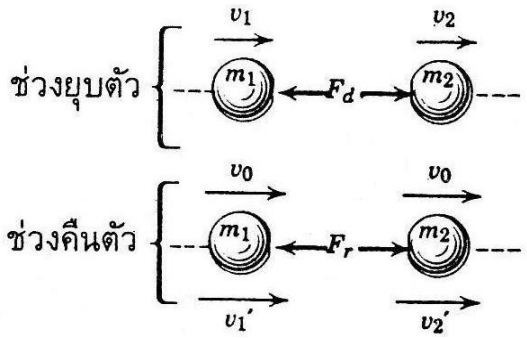
นั่นคือ $$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \quad \text{.....(1)}$$

ข้อสังเกต : ในที่นี้ กำหนดความเร็วไปทางขวามือเป็นบวก และสมมุติว่าแรงภายนอกที่มากระทำต่อระบบมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับแรงเนื่องจากการกระทบ ดังนั้นอิมพัลส์ของแรงภายนอกจึงสามารถตัดทิ้งได้

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 4/17

เนื้อหา

พิจารณาจากภาพด้านล่างนี้ในช่วงการยุบตัว (Deformation) นั้น พลังงานจลน์บางส่วนของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นพลังงานภายในของวัตถุ ส่วนในช่วงการคืนตัว (Restoration) วัตถุจะคายพลังงานภายในกลับคืนเป็นพลังงานจลน์อีกครั้งหนึ่ง วัตถุอาจคายพลังงานภายในกลับคืนเป็นพลังงานจลน์จนหมดสิ้นหรือคายออกมาเพียงบางส่วน หรือไม่คายพลังงานภายในออกมาเลยก็ได้ ทั้งนี้จะขึ้นอยู่กับวัสดุที่ใช้ทำวัตถุทั้งสองนั้น



รูปที่ 3.11 ทิศทางของแรงที่กระทำกับอนุภาคในช่วงการยุบตัวและคืนตัว

สำหรับการกระทบที่วัตถุมีการคายพลังงานภายในกลับคืนเป็นพลังงานเพียงบางส่วนเราสามารถกำหนดได้ด้วยค่าสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ (Coefficient of Restitution) โดย

$$e = \frac{\text{ขนาดของอิมพัลส์ในช่วงการคืนตัว}}{\text{ขนาดของอิมพัลส์ในช่วงการยุบตัว}} = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\,dt}{\int_{0}^{t_0} F_d\,dt}$$

ช่วงเวลาในการยุบตัว คือ 0 ถึง t_0

ช่วงเวลาในการคืนตัว คือ t_0 ถึง t

F_d คือ แรงที่ผิวสัมผัสในช่วงการยุบตัว

F_r คือ แรงที่ผิวสัมผัสในช่วงการคืนตัว

v_0 คือ ความเร็วร่วมของมวลทั้งสองในขณะที่เปลี่ยน จากช่วงยุบตัวไปเป็นช่วงคืนตัว

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 5/17

เนื้อหา

สำหรับทรงกลมมวล m_1

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_{0}^{t_0} F_d dt} = \frac{m_1[-v_1' - (-v_0)]}{m_1[-v_0 - (-v_1)]} = \frac{v_0 - v_1'}{v_1 - v_0}$$

สำหรับทรงกลมมวล m_2

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r dt}{\int_{0}^{t_0} F_d dt} = \frac{m_2[-v_2' - (-v_0)]}{m_2[-v_0 - (-v_2)]} = \frac{v_2' - v_0}{v_0 - v_2}$$

เมื่อขจัดค่า v_0 ออกจากสมการทั้งสองข้างต้น จะได้

$$e = \frac{v_2' - v_1'}{v_1 - v_2}$$

$$= \frac{\text{ขนาดความเร็วสัมพัทธ์ของการแยกจากกัน}}{\text{ขนาดความเร็วสัมพัทธ์ของการเข้าปะทะ}} \quad \text{.....(2)}$$

ดังนั้น ถ้าหากเราทราบความเร็วก่อนการกระทบและค่า e เราก็จะสามารถหาความเร็วหลังการกระทบได้ โดยใช้สมการ (2)

โดยทั่วไปแล้วในช่วงการยุบตัวและการคืนตัว วัตถุจะมีการสูญเสียพลังงาน เราสามารถหาพลังงานที่สูญเสียนี้ได้โดยการหาผลต่างของพลังงานจลน์ของระบบก่อนการกระทบและหลังกระทบ พลังงานที่สูญเสียนี้จะเปลี่ยนไปอยู่ในรูปของพลังงานความร้อน คลื่นความเค้นยืดหยุ่นในวัตถุและเสียง ดังนั้นค่า e จึงมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 1 ($0 < e < 1$) เรียกว่าการกระทบแบบกึ่งยืดหยุ่น

เมื่อ e = 1 จัดเป็น Elastic impact การกระทบที่เกิดขึ้นจะไม่เกิดการสูญเสียพลังงาน

e = 0 จัดเป็น Inelastic impact หรือ Plastic impact การกระทบที่เกิดขึ้นจะเกิดการสูญเสียพลังงานมากที่สุดวัตถุทั้งสองจะเคลื่อนที่ไปพร้อมกันหลังการกระทบ

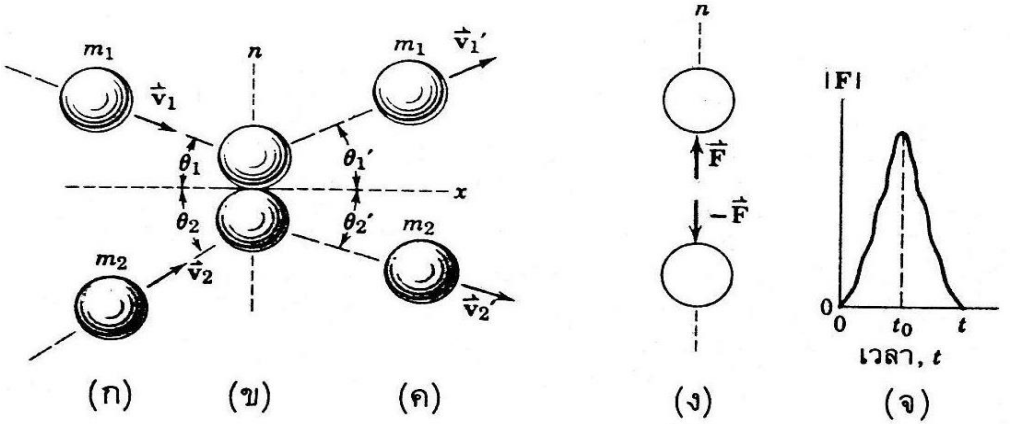
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 6/17

เนื้อหา

ตารางแสดงค่าสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ (Coefficient of Restitution) ของวัตถุต่าง ๆ

การกระทบกันระหว่างวัตถุ	Coefficient of Restitution , e
แก้วกับแก้ว	0.93 - 0.95
เหล็กกล้ากับเหล็กกล้า	0.5 - 0.8
ตะกั่วกับตะกั่ว	0.12 - 0.17
กอร์กกับกอร์ก	0.5 - 0.6
ดินเหนียวกับดินเหนียว (เปียก)	0

2. การกระทบแบบ oblique central impact



รูปที่ 3.12 ลักษณะของการกระทบแบบ Oblique Central Impact

อนุภาคทรงกลมมวล m_1 และ m_2 มีความเร็วเริ่มต้น v_1 และ v_2 ในระนาบเดียวกันและเคลื่อนที่เข้ากระทบกันดังรูปที่ 3.12(ก) ทิศทางของความเร็วคือ θ_1 และ θ_2 วัดจากแนวสัมผัสกับผิวสัมผัสดังรูปที่ 3.12(ข) ความเร็วสุดท้ายเมื่อแยกจากกันจะเป็นดังรูปที่ 3.12 (ค) แรงกระทบคือ $\vec{F}$ และ $-\vec{F}$ ดังรูปที่ 3.12(ง) แรงนี้จะแปรผันจากศูนย์ถึงค่าสูงสุดในช่วงยุบตัว และลดกลับลงเป็นศูนย์อีกครั้งในช่วงคืนตัว โดยที่เวลาทั้งหมดของการกระทบคือ t ดังรูปที่ 3.12 (จ)

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 7/17

เนื้อหา

หากสภาวะเริ่มต้นก่อนการกระทบคือ m_1 , m_2 , v_1 , v_2 , θ_1 และ θ_2 สภาวะสุดท้ายหลังการกระทบจะประกอบด้วยตัวไม่ทราบค่า 4 ตัว คือ v_1' , v_2' , θ_1' และ θ_2'

ในทิศทาง n ไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นในทิศทาง n ของระบบมีค่าคงที่

$$(\Delta G_{\text{ระบบ}})_n = 0 \quad \text{.....(3)}$$

$$-m_1v_1\sin\theta_1 + m_2v_2\sin\theta_2 = -m_1v_1'\sin\theta_1' + m_2v_2'\sin\theta_2'$$

ในทิศทาง x ไม่มีแรงกระทำต่ออนุภาคทั้งสอง ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นในทิศทาง x ของแต่ละอนุภาคมีค่าคงที่

$$\Delta G_x = 0 \quad \text{.....(4)}$$

$$\text{มวล } m_1 \text{ ; } m_1v_1\cos\theta_1 = m_1v_1'\cos\theta_1'$$

$$\text{มวล } m_2 \text{ ; } m_2v_2\cos\theta_2 = m_2v_2'\cos\theta_2'$$

สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ ประยุกต์จากสมการ (2) ใช้กับความเร็วย่อยในทิศทาง n

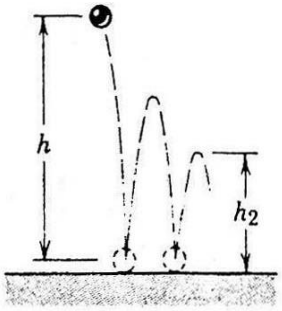
$$e = \frac{\text{ขนาดความเร็วสัมพัทธ์ในแนวแกน n หลังการกระทบ}}{\text{ขนาดความเร็วสัมพัทธ์ในแนวแกน n ก่อนการกระทบ}} \quad \text{.....(5)}$$

$$e = \frac{v_1'\sin\theta_1' + v_2'\sin\theta_2'}{v_1\sin\theta_1 + v_2\sin\theta_2}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 8/17

เนื้อหา

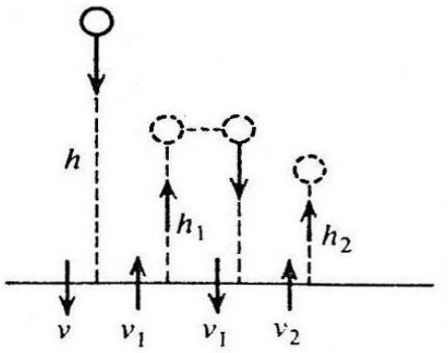
ตัวอย่างที่ 1 ลูกบอลถูกปล่อยให้ตกลงมาจากระดับความสูง h ลงกระทบกับพื้นเหล็ก ถ้าความสูงของการกระดอนครั้งที่สองเท่ากับ h_2 จงหาสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ e



หลักการวิเคราะห์

ความเร็วของการตกกระทบจากความสูง h คือ $\sqrt{2gh}$ และความเร็วหลังการกระทบครั้งแรกจะเท่ากับความเร็วก่อนการกระทบของครั้งหลัง

การคำนวณ



การกระทบครั้งที่ 1

ความเร็วก่อนการกระทบ $v = \sqrt{2gh}$

ความเร็วหลังการกระทบ $v_1 = \sqrt{2gh_1}$

$$e = \frac{v_1}{v}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 9/17

เนื้อหา

การกระทบครั้งที่ 2

ความเร็วก่อนการกระทบ $v_1 = \sqrt{2gh_1}$

ความเร็วหลังการกระทบ $v_2 = \sqrt{2gh_2}$

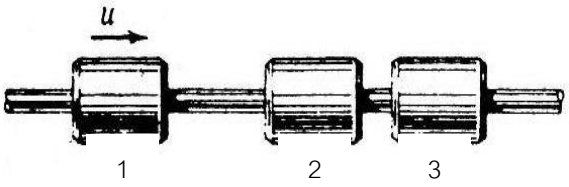
$$e = \frac{v_2}{v_1}$$

ดังนั้น

$$e^2 = \frac{v_2}{v} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh}}$$

$$e = \left[\frac{h_2}{h}\right]^{1/4}$$ **ตอบ**

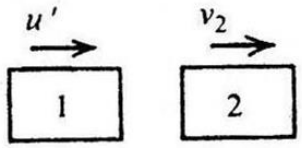
ตัวอย่างที่ 2 ทรงกระบอกลักษณะเดียวกัน 3 ลูกเลื่อนได้อิสระบนเพลาระดับซึ่งอยู่คงที่ ทรงกระบอก 2 และ 3 อยู่นิ่งและทรงกระบอก 1 เคลื่อนเข้าหาด้วยความเร็ว u จงหาความเร็วสุดท้าย v ของทรงกระบอก 3 ในเทอมของ u และสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ e



หลักการวิเคราะห์

ให้คิดการกระทบเป็น 2 ช่วง คือ ช่วงแรกเป็นการกระทบระหว่างทรงกระบอก 1 กับ 2 ช่วงหลังเป็นการกระทบระหว่างทรงกระบอก 2 กับ 3

การคำนวณ



ทิศทางการเคลื่อนที่ของทรงกระบอก 1 และ 2 หลังการกระทบ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 10/17

เนื้อหา

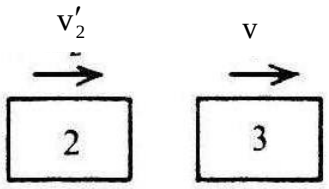
ช่วงการกระทบระหว่างทรงกระบอก 1 กับ 2

$$[\Delta G = 0] \; ; \quad mu + 0 = m'u + mv_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$e = \frac{v_2 - u'}{u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$$v_2 = \frac{u}{2}(1+e)$$



ทิศทางการเคลื่อนที่ของทรงกระบอก 2 และ 3 หลังการกระทบ

ช่วงการกระทบระหว่างทรงกระบอก 2 กับ 3

$[\Delta G = 0]$;

$$m\frac{u}{2}(1+e) + 0 = mv_2' + mv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$e = \frac{v - v_2'}{\frac{u}{2}(1+e)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

จากสมการ (3) และ (4) จะได้

$$v = \frac{u}{4}(1+e)^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 11/17

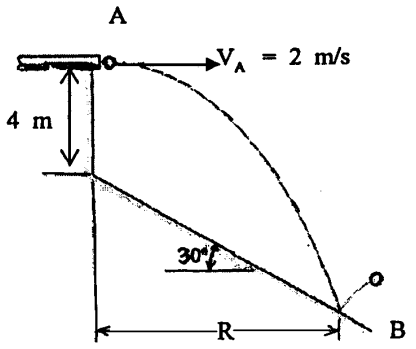
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ลูกบอลมีมวล 5 kg. ถูกเป่าออกมาจากท่อที่จุด A ด้วยความเร็ว 2 m/s ทำให้ลูกบอลดังกล่าวมาตกที่ตำแหน่ง B (กำหนดให้ ค่า Coefficient of Restitution (e) = 0.6)

จงหา 1) ระยะทาง (R) ที่วัดในแนวราบจากจุด A ถึงจุด B

2) อัตราเร็วของลูกบอลก่อนที่ลูกบอลจะกระทบพื้น (V_{A1})

3) อัตราเร็วของลูกบอลหลังจากที่ลูกบอลจะกระทบพื้น (V_{A2})



ธีทำ :

1) หาระยะทาง (R)ใช้สมการการเคลื่อนที่แบบโปรเจคไตล์ (Projectile Motion)

พิจารณาในแนวแกน X

$$s_x = x_O + (v_{xo})t \;\Rightarrow\; R = 0 + 2t$$

พิจารณาในแนวแกน Y

$$s_y = y_O + (v_{yo})t - \frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; -(4 + R\tan 30^o) = 0 + 0 - \frac{1}{2}(9.81)t^2$$

จากการแก้สมการทั้ง 2 แกน จะได้

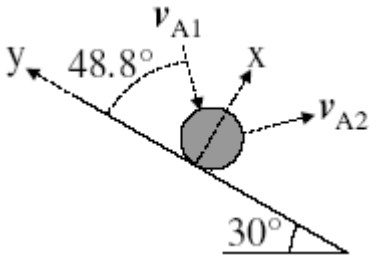
$$t = 1.028\ \text{s} \quad \text{และ} \quad R = 2.06\ \text{m}$$

นั่นคือ ลูกบอลจะใช้เวลาในการเคลื่อนที่จากจุด A มาที่จุด B โดยใช้เวลาเท่ากับ 1.028 วินาที และระยะทางที่วัดในแนวราบ (แกน X) จากจุด A ถึงจุด B มีค่าเท่ากับ 2.06 เมตร **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 12/17

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 (ต่อ)



2)อัตราเร็วของลูกบอลก่อนที่ลูกบอลจะกระทบพื้น (V_{A1})

พิจารณาความเร็วในขณะที่ลูกบอลพ้นออกจากจุด A จาก

$$v_x = v_{xo} = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$

$$v_y = v_{yo} - gt = 0 - 9.81(1.028) = -10.0886 \text{ m/s} \downarrow$$

$\Rightarrow$ $v_{A1} = 10.285$ m/s $\searrow$ (ทำมุม 78.8^o กับแกน x)

จากหลักการของ Conservation of Momentum จะได้

$$m_A(-v_{Ay})_1 = m_A(-v_{Ay})_2$$

$$(v_{Ay})_2 = (v_{Ay})_1 = v_{A1}\cos 48.8^o = 6.77 \text{ m/s}$$

นั่นหมายความว่า ความเร็วของลูกบอลก่อนที่จะกระทบพื้นและหลังจากที่กระทบพื้นในแนวแกน Y ($V_{AY})_1$ และ ($V_{AY})_2$ เท่ากับ 6.77 เมตรต่อวินาที **ตอบ**

3)อัตราเร็วของลูกบอลหลังจากที่ลูกบอลจะกระทบพื้น (V_{A2})

พิจารณาในแนวแกน X $\Rightarrow$ $(v_{Bx})_1 = (v_{Bx})_2 = 0$

$$\Rightarrow \quad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}$$

$$\Rightarrow \quad 0.6 = \frac{0 - (v_{Ax})_2}{-10.285\sin 48.8 - 0}$$

$$(v_{Ax}) = 4.64 \text{ m/s}$$

นั่นหมายความว่า ความเร็วของลูกบอลหลังจากที่จะกระทบพื้นในแนวแกน X ($V_{AX})_2$ เท่ากับ 4.64 เมตรต่อวินาที ดังนั้นอัตราเร็วของลูกบอลหลังจากกระทบพื้นจึงเท่ากับ

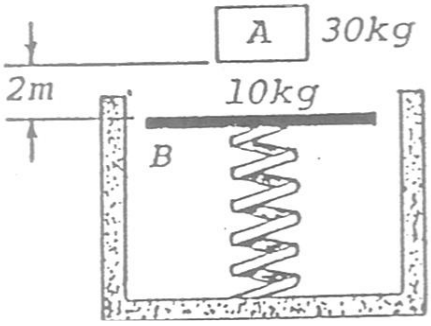
$$v_{A2} = \sqrt{(v_{Ax})_2^2 + (v_{Ay})_2^2} = 8.21 \text{ m/s}$$

ความเร็วของลูกบอลหลังจากที่ลูกบอลกระทบพื้นจะมีค่าเท่ากับ 8.21 เมตรต่อวินาที **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 13/17

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4 : Block A มีมวล 30 kg ถูกปล่อยจากระดับความสูง 2 m มากระทบกับจานกลม B มวล 10 kg ซึ่งวางนิ่งอยู่บนสปริงที่มีค่า $k = 30\,kN/m$ ถ้าหลังการกระทบ Block A และจานกลมมีการเคลื่อนที่ไปพร้อมกัน (Plastic Impact) จงหาระยะเปลี่ยนแปลงมากที่สุดในแนวดิ่งของจานกลม

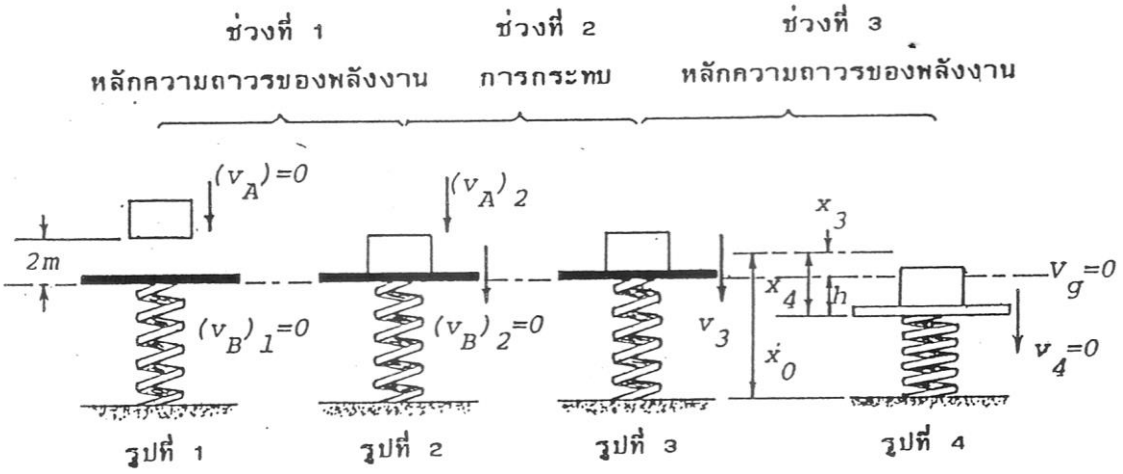


วิธีทำ: จากรูปเราจะแบ่งเหตุการณ์ออกเป็นสามช่วง คือ

ช่วงที่ 1 : เริ่มจาก Block A ถูกปล่อยจากระดับความสูง 2 m จนถึงจุดที่เริ่มกระทบกับจานกลม (เป็นเหตุการณ์ในช่วงระหว่างรูปที่ 1 และ 2)

ช่วงที่ 2 : เป็นช่วงของการกระทบ Block A จะกระทบกับจานกลมและมีความเร็วร่วมกันหลังการกระทบ (v_3) เนื่องจากเป็นการกระทบกันแบบ Plastic Impact ซึ่งเป็นเหตุการณ์ในช่วงระหว่างรูปที่ 2 และ 3

ช่วงที่ 3 : เริ่มจาก Block A และจานกลมเคลื่อนที่ไปพร้อมกันด้วยความเร็วหลังการกระทบ (v_3) กดสปริงให้ยุบตัวลงจนสปริงมีระยะหดตัวเป็น x_4 ทำให้ Block A และจานกลมเคลื่อนที่ลงมาเป็นระยะ h (เป็นเหตุการณ์ในช่วงระหว่างรูปที่ 3 และ 4)



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 14/17

เนื้อหา

การคำนวณ :

ช่วงที่ 1 : จากสมการ $U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{1}{2} m_A (v_A)_2^2$, $(\Delta v_g)_A = -mg(2)$, $\Delta T_B = 0$, $(\Delta v_g)_B = 0$, $\Delta v_e = 0$

ดังนั้น

$$\frac{1}{2}(30)(v_A)_2^2 - 30(9.81)(2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_A = 6.26 \text{ m/s}$$

ช่วงที่ 2 : จากสมการ $(\Delta G_{system})_n = 0$

$$m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v_3$$

$$30(6.26) + 0 = (30+10)v_3$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = 4.70 \text{ m/s}$$

ช่วงที่ 3 : จากสมการ $U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e = 0$

ขณะที่จานกลมวางนิ่งอยู่บนสปริง จะกดสปริงเป็นระยะ

$$x_3 = \frac{w_B}{k} = \frac{10 \text{ x } 9.81}{20 \text{ x } 10^3} = 4.91 \text{x} 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_4^2 - v_3^2) = \frac{1}{2}(30+10)[0 - 4.70^2] = -442 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta v_g = -(m_A + m_B)gh = -(30+10)(9.81)h = -392(h) \text{ J}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta v_e = \frac{1}{2}k(x_4^2 - x_3^2) = \frac{1}{2}(20 \text{x} 10^3)[x_4^2 - (4.91 \text{x} 10^{-3})^2] = 10{,}000x_4^2 - 0.241$$

$$= 10{,}000(h + x_3)^2 - 0.241$$

แทนค่าลงในสมการ $U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e = 0$ จะได้

$$-442 - 392h + 10{,}000[h + (4.91 \text{x} 10^{-3})]^2 - 0.241 = 0$$

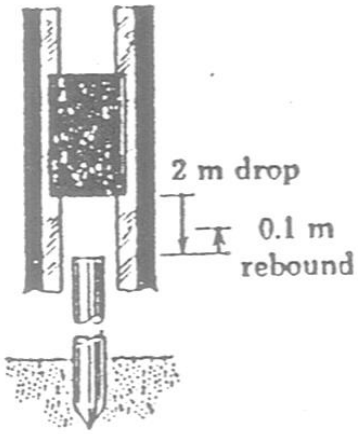
$$\Rightarrow \quad h = 0.225 \text{ m}$$

ดังนั้นระยะเปลี่ยนแปลงมากที่สุดในแนวดิ่งของจานคือ $h = 0.225$ m **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 15/17

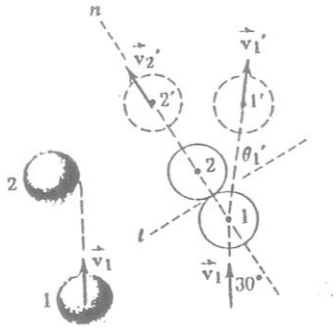
แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

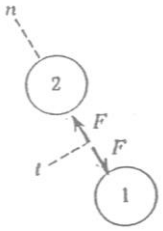
ข้อที่ 1 ตัวตอกเสาเข็มมวล 800 kg ถูกปล่อยจากความสูง 2 m เหนือเสาเข็มที่มีมวล 2,400 kg ถ้าตัวตอกเสาเข็มกระดอนขึ้น 0.1 m ทันทีหลังกระทบเสาเข็ม จงคำนวณหาเปอร์เซ็นต์การสูญเสียพลังงาน **ตอบ.** 45.2 %



ข้อที่ 2 ทรงกลม 1 มีความเร็ว $v_1 = 6$ m/s ในทิศทางดังรูป วิ่งเข้าชนทรงกลม 2 ซึ่งมีลักษณะเหมือนกันและอยู่นิ่ง ถ้าสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e = 0.6$ จงหาความเร็วหลังการกระทบและเปอร์เซ็นต์การสูญเสียพลังงาน

ตอบ. 23.8 %





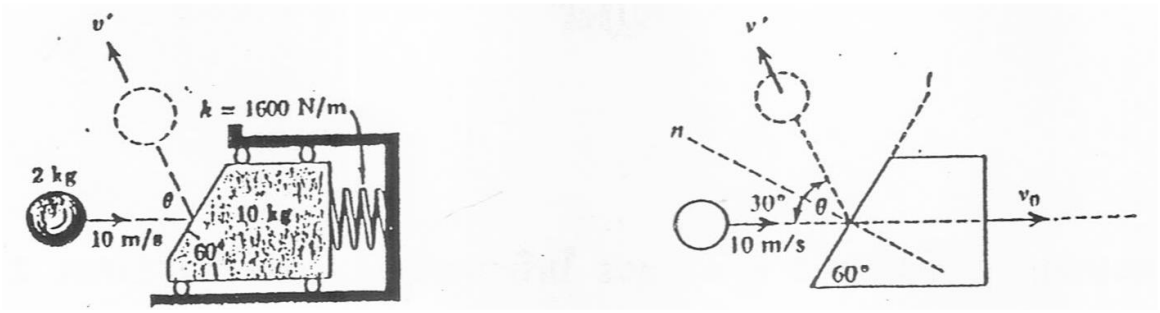
FBD

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 15/17

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ทรงกลมมวล 2 kg วิ่งด้วยความเร็วในแนวราบ 10 m/sเข้ากระทบกับรถเลื่อนซึ่งรองรับด้วยสปริงที่มีค่า Stiffness of Spring , k = 1,600 N/m รถเลื่อนเดิมทีอยู่ในตำแหน่งหยุดนิ่งและสปริงมีความยาวปกติ ถ้าสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ e = 0.60 จงหาความเร็ว v′ และมุม θ ของทรงกลมรวมทั้งระยะทางมากที่สุดที่รถเลื่อนเคลื่อนที่

ตอบ. $v' = 6.04$ m/s , $v'_O = 2.087$ m/s , $\theta'_1 = 85.9^o$



<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 269-283
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 101-104
- เอกสารหมายเลข 5 หน้าที่ 105-109
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 215-227
- เอกสารหมายเลข 8 หน้าที่ 613
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 241</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 10
- ใบแบบฝึกหัดสัปดาห์ที่ 10
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดสัปดาห์ที่ 10</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้ผู้เรียนตอบคำถามแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 11	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 4 จลนพลศาสตร์ของระบบอนุภาค	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 1/16

ชื่อบทเรียน

4.1 สมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

4.2 สมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาค

4.3 สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค

จุดประสงค์การสอน

4.1 เข้าใจสมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคได้ถูกต้อง

4.1.1 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

4.1.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของระบบอนุภาค

4.1.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้สมการการเคลื่อนที่

4.2 เข้าใจสมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาคได้ถูกต้อง

4.2.1 อธิบายสมการของงานและพลังงานของระบบอนุภาค

4.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์งานและพลังงานของระบบอนุภาค

4.2.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน

4.3 เข้าใจสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมได้ถูกต้อง

4.3.1 อธิบายสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค

4.3.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบอนุภาค

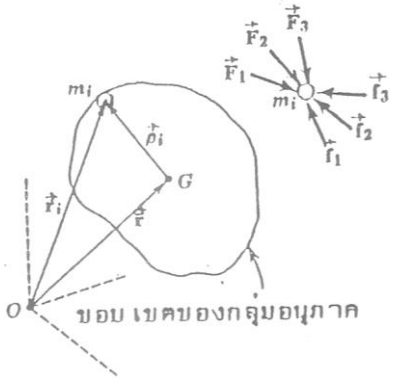
4.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของระบบอนุภาคโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 2/16

เนื้อหา

ในบทที่ผ่านมา เราได้วิเคราะห์ถึงพลศาสตร์ของอนุภาคเพียงอนุภาคเดียวเสียส่วนใหญ่ มีเพียงเรื่องการกระทบเท่านั้น ที่ได้ทำการวิเคราะห์ถึงการเคลื่อนที่ของสองอนุภาค ซึ่งพิจารณาเป็นระบบเดียวกัน สมการของพลศาสตร์ที่นำมาใช้กับการเคลื่อนที่ของอนุภาคเดียว ก็สามารถวิเคราะห์ปัญหาได้กว้างขวางพอสมควร แต่ก็ยังมีปัญหาอีกหลายลักษณะที่ไม่อาจวิเคราะห์ได้ เช่น การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่เป็นชิ้นส่วนของเครื่องจักรกลและยานพาหนะต่าง ๆ รวมทั้งโครงสร้างอื่น ๆ ที่มีการเคลื่อนที่ อันที่จริงแล้ววัตถุเกร็งก็ประกอบขึ้นด้วยกลุ่มอนุภาค ที่มีระยะระหว่างอนุภาคคงที่แน่นอน หรือปัญหาเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุแปรรูป ซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรูปร่าง เช่น การเคลื่อนที่ของอากาศและเชื้อเพลิงผ่านเครื่องยนต์กังหันไอพ่น ก๊าซเผาไหม้พุ่งออกมาจากหัวฉีด การไหลของน้ำผ่านเครื่องสูบเป็นต้น ดังนั้นเราจึงต้องสร้างสมการขึ้นมาเพื่อใช้แก้ปัญหาเหล่านี้

4.1 สมการการเคลื่อนที่ (Equation of Motion)



รูปที่ 4.1 ระบบของอนุภาค

พิจารณาระบบซึ่งประกอบด้วย n อนุภาคล้อมรอบด้วยผิวปิด ผิวปิดนี้คือ ผิวนอกของวัตถุเกร็ง อนุภาคมวล m_i มีแรง $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,$ ... มากระทำเนื่องจากแรงภายนอก และมีแรง $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3,$..... มากระทำเนื่องจากแรงปฏิกิริยาของอนุภาคข้างเคียง

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 3/16

เนื้อหา

จาก Varignon ′ Theorem

$$m\vec{\bar{r}} = \sum m_i \vec{r}_i$$

ดังนั้น $m\bar{x} = \sum m_i x_i$, $m\bar{y} = \sum m_i y_i$, $m\bar{z} = \sum m_i z_i$ .....(4.1)

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาจะได้

$$m\dot{\vec{\bar{r}}} = \sum m_i \dot{\vec{r}}_i \quad \text{หรือ} \quad m\vec{\bar{v}} = \sum m_i \vec{v}_i$$

หรือ

$$m\bar{v}_x = \sum m_i v_{xi} \ , \ m\bar{v}_y = \sum m_i v_{yi} \ , \ m\bar{v}_z = \sum m_i v_{zi}$$

สมการการเคลื่อนที่ $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ของมวล m_i

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ... \ \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 + ... = m_i \ddot{\vec{r}}_i \qquad .....(4.2)$$

โดย $\ddot{\vec{r}}_i$ คือ ความเร่งของอนุภาคมวล m_i เมื่อรวมสมการทุกอนุภาคจะได้ว่า

$$\sum \vec{F} + \sum \vec{f} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$\sum \vec{f}$ คือ ผลรวมของแรงภายในของระบบ ซึ่งประกอบด้วยแรงกิริยาและปฏิกิริยาระหว่างอนุภาค ซึ่งแรงนี้จะเกิดเป็นคู่ โดยมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงกันข้ามในแนวเส้นตรงเดียวกัน ดังนั้น $\sum \vec{f}$ ของทั้งระบบจึงเท่ากับศูนย์

$$\sum \vec{F} = \sum m_i \ddot{\vec{r}}_i = m\ddot{\vec{\bar{r}}} = m\vec{\bar{a}} \qquad .....(4.3)$$

โดย $\vec{\bar{a}}$ คือ ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ มีทิศทางเดียวกับ $\sum \vec{F}$ โดยแนวแรง $\sum \vec{F}$ ไม่จำเป็นต้องผ่านจุดศูนย์กลางมวล ก็ได้

สมการที่ (4.3) คือ หลักการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวล กล่าวคือ “แรงลัพธ์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบมวล (กลุ่มอนุภาค) จะเท่ากับมวลของระบบคูณด้วยความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล” เมื่อเขียนแยกในแต่ละแนวแกนจะได้ว่า

$$\sum F_X = m\bar{a}_X \ , \ \sum F_Y = m\bar{a}_Y \ , \ \sum F_Z = m\bar{a}_Z \qquad .....(4.4)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 4/16

เนื้อหา

4.2 สมการงานและพลังงาน (Work and Energy Equation)

สำหรับอนุภาคมวล m_i , $U_i = \Delta T_i$

โดย U_i คือ งานที่เกิดจากแรงภายนอก $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3,...$ และแรงจากอนุภาคข้างเคียง $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3,.....$

ΔT_i คือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของอนุภาคมวล m_i โดย $\Delta T_i = \Delta(\frac{1}{2} m_i v_i^2)$

v_i คือ ความเร็วของอนุภาคมวล m_i ซึ่ง $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$

เมื่อคิดรวมทุก ๆ อนุภาคในระบบจะได้ว่า

$$\sum U_i = \sum \Delta T_i \qquad \text{หรือ} \qquad \sum U_i = \sum \Delta T_i \qquad .....(4.5)$$

โดย

$U = \sum U_i$ คือ งานซึ่งกระทำโดยแรงทั้งหมดบนทุกอนุภาค

ΔT คือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ทั้งหมดของระบบ โดย $T = \sum T_i$

ในกรณีของวัตถุเกร็ง งานที่กระทำโดยทุกคู่ของแรงภายในระบบ คือ $\vec{f}_i$ และ $-\vec{f}_i$ จะหักล้างกัน เพราะว่าจุดกระทำของแรงภายในแต่ละคู่ จะมีการขจัดในแนวแรงเท่ากัน โดยแรงหนึ่งจะให้งานเป็นบวก และอีกแรงหนึ่งจะให้งานเป็นลบ ดังนั้น U คือ งานทั้งหมดเนื่องจากแรงภายนอก

ในกรณีที่วัตถุแปรรูปซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของระบบจักรกล เช่น วัตถุยืดหยุ่นต่าง ๆ ส่วนหนึ่งของงาน ซึ่งกระทำโดยแรงภายนอกจะถูกเปลี่ยนไปเป็นพลังงานศักย์ยืดหยุ่น (Elastic Potential Energy , V_e)

$$U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad .....(4.6)$$

เมื่อ U คืองานเนื่องจากแรงกระทำจากภายนอก ยกเว้นแรงโน้มถ่วงและแรงเนื่องจากชิ้นส่วนยืดหยุ่น

ΔV_g คือการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง ($\Delta V_g = mg\Delta\bar{h}$)

ΔV_e คือการเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ยืดหยุ่น $\left[\Delta V_e = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) \right]$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 5/16

เนื้อหา

พลังงานจลน์ของระบบอนุภาคคือ

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i \qquad \text{แต่} \quad \vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}$$

เมื่อ $\vec{v}_i$ คือ ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล m_i

$\dot{\vec{\rho}}$ คือ ความเร็วของ m_i เทียบกับแกนเคลื่อนที่ขนานกับแนวเดิม ซึ่งเคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด G

เนื่องจาก $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$

ดังนั้น $T = \sum \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i) \cdot (\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i)$

$$= \sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\vec{\rho}}_i \right|^2 + \sum m_i \vec{\bar{v}} \cdot \dot{\vec{\rho}}_i)$$

แต่เนื่องจาก $\sum m_i \vec{\rho}_i = 0$ เพราะ $\vec{\rho}_i$ วัดจากจุด G

ดังนั้น

$$\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 = \vec{\bar{v}} \cdot \sum m_i \dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\bar{v}} \cdot \frac{d}{dt} \sum (m_i \vec{\rho}_i) = 0$$

และ

$$\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 = \frac{1}{2} \bar{v}^2 \sum m_i = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

ดังนั้นพลังงานจลน์ของระบบมวล คือ

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m \bar{v}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\vec{\rho}} \right|^2 \qquad \text{.....(4.7)}$$

จะเห็นว่า พลังงานจลน์ของระบบมวลจะเท่ากับผลรวมของพลังงานจลน์ของแต่ละมวลย่อยในระบบ คือ $\sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ หรือเท่ากับผลรวมของพลังงานจลน์ ในส่วนของระบบที่เคลื่อนที่ขนานกับแนวเดิม (Translation) คือ $\sum \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2$ และในส่วนของระบบที่เคลื่อนที่หมุนสัมพัทธ์กับจุดศูนย์กลางระบบมวล คือ $\sum \frac{1}{2} m_i \left| \dot{\vec{\rho}} \right|^2$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 6/16

เนื้อหา

4.3 สมการอิมพัลส์และโมเมนตัม (Impulse and Momentum Equation)

จากรูปที่ 4.1

$$G_i = m_i \vec{v}_i \qquad (\ \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i\ )$$

เมื่อคิดทั้งระบบจะได้

$$\sum G_i = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$= \sum m_i (\vec{v}_i + \dot{\vec{\rho}}) = \sum m_i \bar{\vec{v}} + \frac{d}{dt}\sum m_i \vec{\rho}_i$$

$$= \bar{\vec{v}} \sum m_i + \frac{d}{dt}(0)$$

$$\vec{G} = \sum m_i \vec{v}_i = m\bar{\vec{v}} \qquad .....(4.8)$$

นั่นคือ โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบมวล คือ ผลรวมของโมเมนตัมเชิงเส้นของมวลในระบบ หรือเท่ากับผลคูณของมวลและความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลนั้น

$$\dot{\vec{G}} = m_i \dot{\bar{\vec{v}}}_i = m\bar{\vec{a}} = \sum F$$

$$\sum F = \dot{\vec{G}} \qquad .....(4.9)$$

นั่นคือ ผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบมวลใด ๆ จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบมวลนั้น

พิจารณาโมเมนตัมเชิงมุมของระบบมวลจากรูปที่ 4.1 รอบจุด O

$$\vec{H}_o = \sum \vec{H}_{o_i} = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum (\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i$$

แต่ $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i \ \therefore \sum (\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i) = 0$

ดังนั้น $\dot{\vec{H}}_o = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) + \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = \sum \vec{M}_o$

นั่นคือ

$$\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o \qquad ....(4.10)$$

$\sum \vec{M}_o$ จะเป็นโมเมนต์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบมวล ทั้งนี้เพราะโมเมนต์ของแรงภายใน $(\vec{f}_i)$ และ $(-\vec{f}_i)$ จะหักล้างกันหมด นั่นคือ ผลลัพธ์ของโมเมนต์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบมวลรอบจุดคงที่ใด ๆ จะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบรอบจุดนั้น

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 7/16

เนื้อหา

โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล G คือ

$$\vec{H} = \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i)$$
$$= \sum(\vec{\rho}_i \times m_i[\vec{v} + \dot{\vec{\rho}}_i])$$
$$= -\vec{v} \times \sum m_i \vec{\rho}_i + \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i])$$

...(4.1)ดังนั้น

$$\vec{H} = \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i)$$
$$\dot{\vec{H}} = \sum(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i) + \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i)$$
$$\vec{a}_i = \vec{a} + \ddot{\vec{\rho}}_i$$

ดังนั้น

$$\dot{\vec{H}} = \sum(\vec{\rho}_i \times m[\vec{a}_i - \vec{a}])$$
$$\dot{\vec{H}} = \sum(\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i) + \vec{a} \times \sum m_i \vec{\rho}_i$$
$$\dot{\vec{H}} = \sum \vec{M} \qquad ...(4.12)$$

นั่นคือผลลัพธ์ของโมเมนต์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อระบบรอบจุดศูนย์กลางของระบบมวลจะเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุมของระบบรอบจุดศูนย์กลางมวล

หลักความถาวรของโมเมนตัม

ระบบมวลซึ่งไม่มีการสูญเสียพลังงาน เนื่องจากแรงเสียดทานภายใน ซึ่งให้งานลบหรือไม่มีการสูญเสียพลังงานของชิ้นส่วนที่ไม่มีความยืดหยุ่น เราเรียกระบบมวลนี้ว่า Conservative of Mass และเมื่อไม่มีงานเนื่องจากแรงภายนอกบนระบบมวลนี้จะได้สมการ $U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0$

แรงภายนอก $\sum F$ ซึ่งกระทำต่อ Conservative หรือ Non Conservative Mass ในช่วงเวลาใด ๆ หากมีค่าเป็นศูนย์จะได้ $\sum F = \dot{\vec{G}} = 0$ นั่นคือ $\Delta \vec{G} = 0$

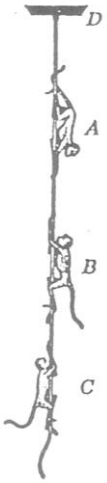
เมื่อโมเมนต์รอบจุดคงที่ O หรือจุดศูนย์กลางมวล G ของแรงภายนอกทั้งหมดมีค่าเป็นศูนย์ $\dot{\vec{H}}_o = \sum \vec{M}_o = 0$ หรือ $\sum \vec{M} = \dot{\vec{H}} = 0$ นั่นคือ $\Delta \vec{H}_o = 0$ หรือ $\Delta \vec{H} = 0$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 8/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1

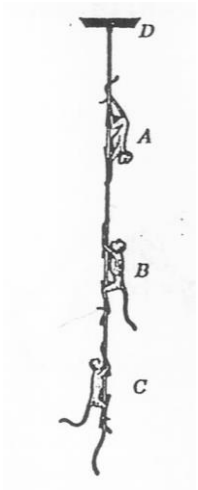
ลิง A , B และ C , มวล 10 , 15 และ 8 kg ตามลำดับ ไต่เชือกซึ่งผูกแขวนไว้ที่ D หากในขณะนั้น ลิง A ไต่ลงด้วยความเร่ง 1.5 m/s^2 ลิง B ไต่ขึ้นด้วยความเร็วคงที่ 0.5 m/s ลิง C ไต่ขึ้นด้วยความเร่ง 0.9 m/s^2 จงหาความตึงเชือก T ที่จุด D ในขณะนั้น



หลักการวิเคราะห์

พิจารณาเชือกและลิงทั้งสามเป็นระบบอนุภาค

การคำนวณ



$[\sum F = \sum m_i a_i]$; $\uparrow +$

$$T - (10 + 15 + 8)9.81 = 10(-1.5) + 15(0) + 8(0.9)$$

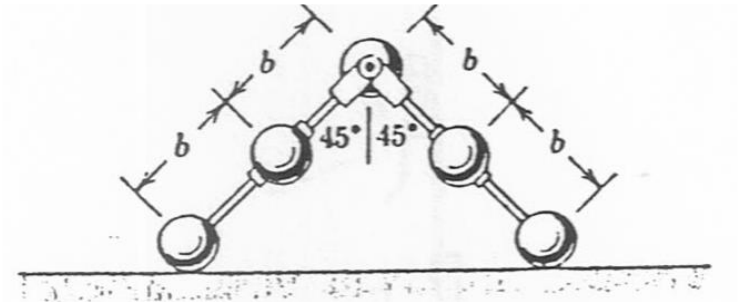
$$T = 316 \text{ N}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 9/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2

ทรงกลมลักษณะเดียวกันจำนวน 5 ลูก ถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งดังรูป ให้เคลื่อนที่ในระนาบดิ่ง เนื่องจากความโน้มถ่วง ทรงกลม 2 ลูกล่างของแต่ละข้างยึดติดกับแขนน้ำหนักเบาที่หมุนได้อิสระบนทรงกลมลูกบน หากไม่คิดความเสียดทานจงหาความเร็ว v ของทรงกลมลูกบนเมื่อสัมผัสพื้น (ข้อสังเกต : ความเร็วของทรงกลมลูกกลางจะเป็นครึ่งหนึ่งของทรงกลมลูกบนเมื่อสัมผัสพื้น)



หลักการวิเคราะห์

เมื่อทรงกลมลูกบนสัมผัสพื้น แขนทั้งสองจะกางมากสุด ทรงกลมที่ปลายของแขนทั้งสองจะมีความเร็วเป็นศูนย์

การคำนวณ

$$\Delta T = \frac{1}{2}mv^2 + 2\left[\frac{1}{2}m\left[\frac{v}{2}\right]^2\right] = \frac{3}{4}mv^2$$

$$\Delta V_g = 2mg(-b\cos 45^\circ) + mg(-2b\cos 45^\circ)$$

$$= -2\sqrt{2}mgb$$

$$[U = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e] \ ;$$

$$0 = \frac{3}{4}mv^2 - 2\sqrt{2}mgb$$

$$v = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3}gb}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 10/16

เนื้อหา

4.3 สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาคคือ $\vec{G} = \sum \vec{G}_i = \sum m_i \vec{v}_i$

แต่ $\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}$

ดังนั้น $\vec{G} = \sum m_i(\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}) = \sum m_i \vec{\bar{v}} + \frac{d}{dt}(\sum m_i \vec{\rho}_i)$

$$\sum m_i \vec{\rho}_i = m\vec{\bar{\rho}} = 0$$

$$\vec{G} = \vec{\bar{v}} \sum m_i + 0$$

$$\vec{G} = m\vec{\bar{v}} \qquad (1)$$

$$\dot{\vec{G}} = m\dot{\vec{\bar{v}}} = m\dot{\vec{\bar{a}}}$$

$$\sum \dot{\vec{F}} = \dot{\vec{G}} \qquad (2)$$

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาครอบจุด O คือ

$$\vec{H}_O = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum (\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i) + \sum (\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{v}}_i)$$

แต่ $\dot{\vec{r}}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum (\vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i) = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$$

$$\sum \dot{\vec{M}}_O = \dot{\vec{H}}_O \qquad (3)$$

โมเมนตัมเชิงมุมของระบบอนุภาครอบจุดศูนย์กลางมวล G คือ

$$\vec{\bar{H}} = \sum (\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

แต่ $\vec{v}_i = \vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i$

ดังนั้น $\sum (\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum \left[\vec{\rho}_i \times m_i \left(\vec{\bar{v}} + \dot{\vec{\rho}}_i\right)\right]$

$$= -\vec{\bar{v}}_i \times \sum m_i \vec{\rho}_i + \sum \left(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right)$$

เนื้อหา

แต่ $\sum m_i \vec{\rho}_i = m\bar{\rho} = 0$

$$\vec{\bar{H}} = \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \vec{\rho}_i) \quad (4)$$

$$\dot{\vec{\bar{H}}} = \sum(\dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i) + \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i)$$

แต่ $\vec{a}_i = \vec{\bar{a}} + \ddot{\vec{\rho}}_i$

ดังนั้น $$\sum(\vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i) = \sum\left[\rho_i \times m_i\left(\vec{a}_i - \vec{\bar{a}}_i\right)\right]$$

$$= \sum\left(\vec{\rho}_i \times \vec{F}_i + \vec{\bar{a}}12 \times \sum m_i \vec{\rho}_i\right) = \sum \vec{\bar{M}}$$

$$\sum \vec{\bar{M}} = \dot{\vec{\bar{H}}} \quad (5)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 12/16

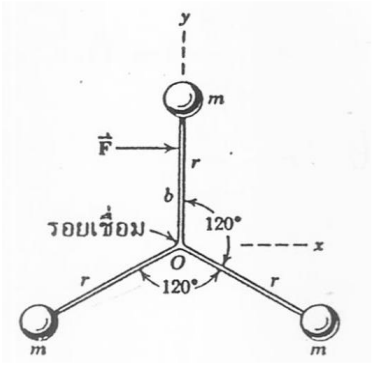
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3

ลูกบอลลักษณะเดียวกันมวล m จำนวน 3 ลูก เชื่อมติดกับโครงน้ำหนักเบาวางอยู่บนพื้นระดับผิวเรียบ ถ้ามีแรง $\vec{F}$ มากระทำอย่างทันทีทันใด จงหา

(ก) ความเร่งของจุด O

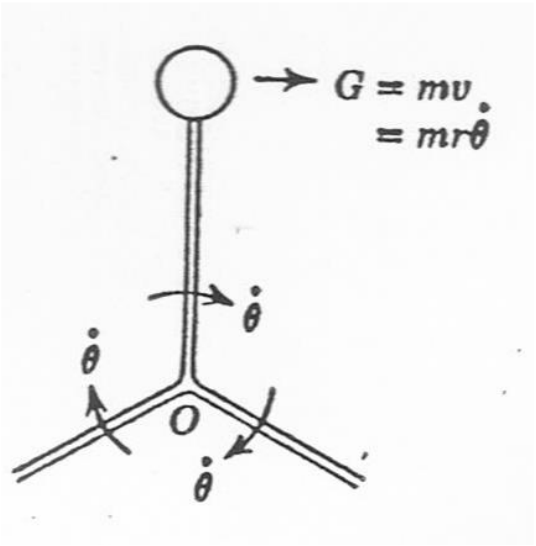
(ข) ความเร่งเชิงมุม $\ddot{\theta}$ ของโครง



หลักการวิเคราะห์

จุด O เป็นจุดศูนย์กลางมวล ดังนั้น $a_O = \vec{a}, H_O = \vec{H}$

การคำนวณ



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 13/16

เนื้อหา

$[\sum \vec{F} = m\vec{a}]$; $F_i = 3m\vec{a}$

$\vec{a} = \vec{a}_O = \frac{F}{3m} i$ **ตอบ**

$H_O = \vec{H}$

$= 3(mr\dot{\theta})r = 3mr^2\dot{\theta}$

$[\sum \vec{\vec{M}} = \dot{\vec{\vec{H}}}]$; $Fb = \frac{d}{dt}(3mr^2\dot{\theta}) = 3mr^2\ddot{\theta}$

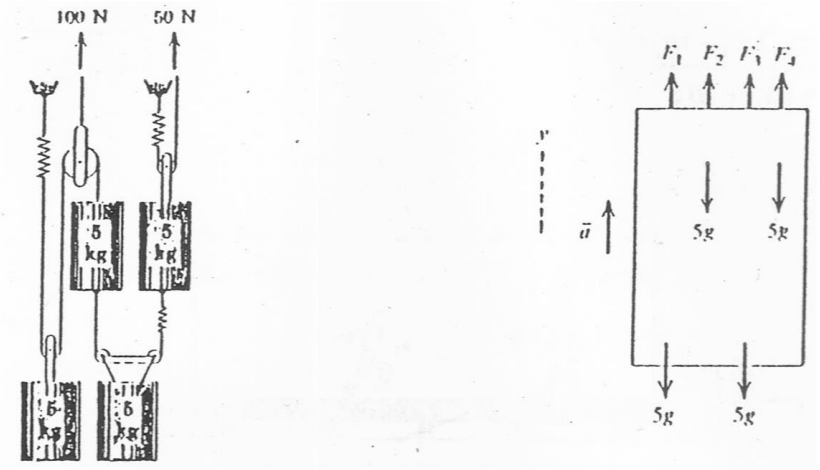
$\ddot{\theta} = \frac{Fb}{3mr^2}$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 14/16

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

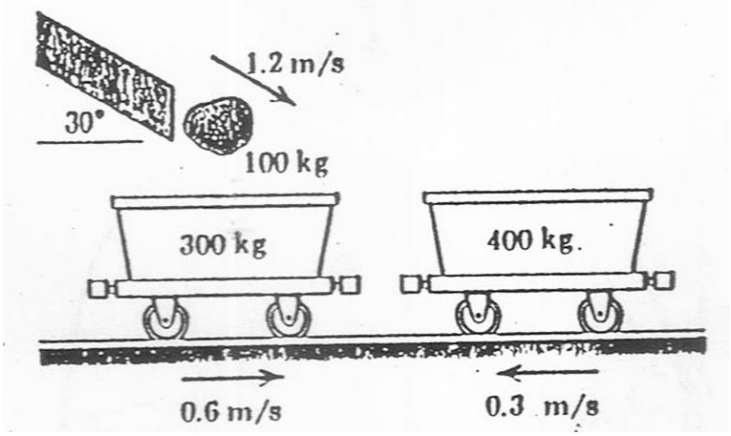
ข้อที่ 1 : จงหาความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ซึ่งประกอบด้วยทรงกระบอกมวล 5 kg จำนวน 4 ชิ้น สมมุติให้ไม่คิดความเสียดทานของมวล ของรอกและสปริง

ตอบ. a = 2.69 m/s^2



ข้อที่ 2: รถขนแร่มวล 300kg และ 400 kg เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม ด้วยอัตราเร็ว 0.6 m/s และ 0.3 m/s ตามลำดับดังรูป โดยรถทั้งสองจะล็อคติดกัน หลังการชนโดยทันทีทันใด ก่อนการชนนั้น มีก้อนแร่มวล 100 kg ตกลงมาจากรางด้วยความเร็ว 1.2 m/s ในทิศทางดังรูป ลงสู่รถขนแร่มวล 300kg จงหาความเร็วของระบบหลังจากก้อนแร่หยุดนิ่งเทียบกับรถ ความเร็วนี้จะมีค่าเท่าเดิมหรือไม่หากการชนเกิดขึ้นก่อนที่ก้อนแร่จะตกลงมา

ตอบ. v = 0.205 m/s และ ความเร็วที่ได้จะยังมีค่าเดิม

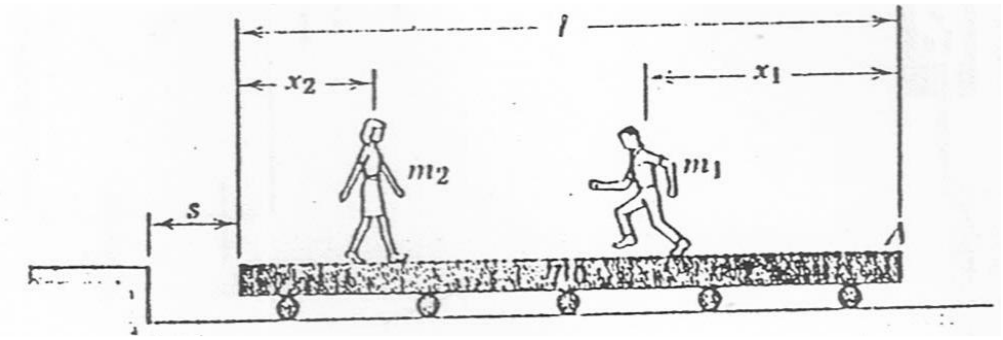


ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 15/16

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

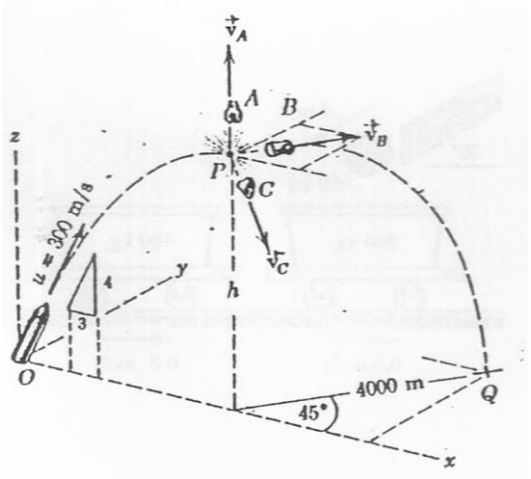
ข้อที่ 3 ผู้ชายมวล m_1 และผู้หญิงมวล m_2 ยืนอยู่ที่ปลายของแผ่นไม้คนละด้านของแผ่นไม้มวล m_O ซึ่งอยู่นิ่งที่ $s = 0$ และจะเคลื่อนที่ไปบนลูกกลิ้งโดยไม่มีความเสียดทาน เมื่อคนทั้งสองเดินเข้าหากัน จงหาการขจัด s ของแผ่นไม้เมื่อคนทั้งสองเดินมาพบกันในเทอมการขจัด x_1 ของผู้ชายเทียบกับแผ่นไม้

ตอบ. [$s = \dfrac{(m_1 + m_2)x_1 - m_2 l}{m_O + m_1 + m_2}$]



ข้อที่ 4 : ลูกกระสุนปืนใหญ่มวล 20 kg ถูกยิงจากจุด O ด้วยความเร็ว $u = 300$ m/s ในระนาบดิ่ง x - z โดยมีทิศทางดังรูป เมื่อขึ้นไปถึงจุดสูงสุด P กระสุนจะระเบิดออกเป็นสามส่วนคือ A , B และ C ทันทีทันใดหลังการระเบิดจะสังเกตเห็นว่า ชิ้นส่วน A จะเคลื่อนที่ในแนวดิ่งไปได้ระยะ 500 m เหนือจุด P ชิ้นส่วน B จะมีความเร็ว v_B ในระนาบระดับและจะตกสู่พื้นดินที่จุด Q มวล A , B และ C คือ 5 , 9 kg และ 6 kg ตามลำดับ จงหาความเร็วของชิ้นส่วน C ทันทีที่ระเบิด สมมุติไม่คิดแรงต้านของอากาศ

ตอบ. $v_C = 468$ m/s



<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 284-296
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 120-129
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 229-231,226-227
- เอกสารหมายเลข 9 หน้าที่ 267-279</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 11
- ใบแบบฝึกหัดสัปดาห์ที่ 11
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดสัปดาห์ที่ 11</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 12	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 4 จลนพลศาสตร์ของระบบอนุภาค	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 1/16

ชื่อบทเรียน

4.4 การไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น

4.5 การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน

จุดประสงค์การสอน

4.4 เข้าใจสมการการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่นได้ถูกต้อง

4.4.1 อธิบายลักษณะการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น

4.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การไหลของมวลแบบทรงตัวมั่น

4.4.3 คำนวณการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น

4.5 เข้าใจสมการของระบบมวลแบบแปรผันได้ถูกต้อง

4.5.1 อธิบายลักษณะการไหลของระบบมวลแบบแปรผัน

4.5.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน

4.5.3 คำนวณการไหลของระบบมวลแบบแปรผัน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 2/16

เนื้อหา

การไหลของระบบมวล

ในหัวข้อนี้ เราจะได้นำสมการโมเมนตัมมาใช้กับการไหลของระบบมวล ซึ่งจะมีการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมเกิดขึ้น พลศาสตร์ของการไหลของระบบมวลมีความสำคัญอย่างยิ่งในการวิเคราะห์ และออกแบบเครื่องจักรกลของของไหลแบต่าง ๆ การไหลของระบบมวล เราสามารถแบ่งออกได้ 2 แบบ คือ

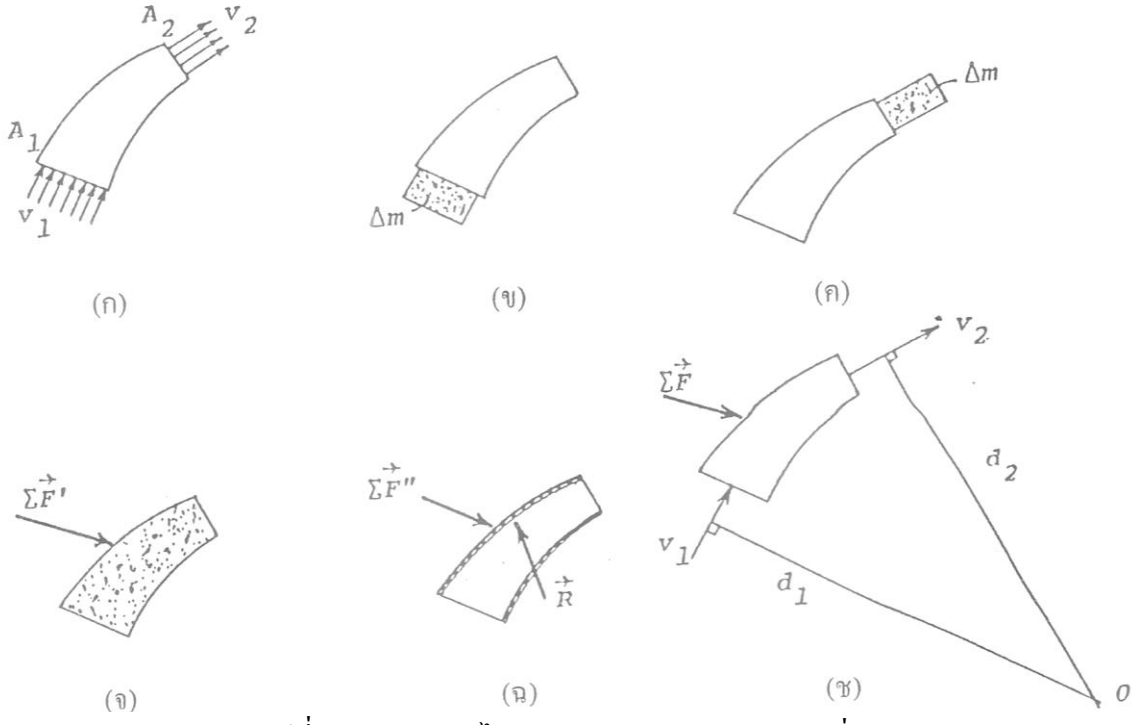
1. การไหลของมวลแบบทรงตัวมั่น (Steady Mass Flow)

คือ การไหลของระบบมวลที่มีการไหลของมวลที่เข้าไปในปริมาตรที่กำหนดให้อันหนึ่ง เท่ากับอัตราการไหลของมวลที่ออกจากปริมาตรนั้น ดังนั้นมวลภายในปริมาตรที่กำหนดจะมีค่าคงที่ตลอดเวลา การไหลของระบบมวลนี้ได้แก่ การไหลของน้ำผ่านไปในท่อ เครื่องสูบ เครื่องกังหันและหัวฉีด เป็นต้น

2. การไหลของระบบมวลแบบแปรผัน (Variable Mass Flow)

คือ การไหลของระบบมวลที่ไหลเข้าหรือออกจากปริมาตรที่กำหนด ทำให้มวลภายในปริมาตรที่กำหนดนั้นเพิ่มขึ้นหรือลดลง การไหลของระบบมวลแบบนี้ได้แก่ การพุ่งออกของเชื้อเพลิงเผาไหม้จากเครื่องยนต์จรวด ทำให้มวลของจรวดลดลง เป็นต้น

4.4 การไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น



รูปที่ 4.2 แสดงการไหลของระบบมวลแบบทรงตัวมั่น

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 3/16

เนื้อหา

พิจารณาภาชนะในรูปที่ 4.2 (ก) มีมวลไหลเข้าด้วยอัตราคงที่ m' ผ่านช่องทางเข้าพื้นที่ A_1 และมีมวลไหลออกผ่านช่องทางออก พื้นที่ A_2 ในอัตราเดียวกัน ดังนั้นจึงไม่มีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงของมวลภายในภาชนะนั้น มวลไหลเข้าด้วยความเร็ว $\vec{v}_1$ ในแนวตั้งฉากกับพื้นที่ A_1 และตรงทางออกมีความหนาแน่นมวล ρ_2 เราจะได้ว่า

อัตราการไหลของมวล คือ

$$m' = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \qquad ...(4.13)$$

ในการวิเคราะห์แรงที่กระทำต่อภาชนะ และระบบมวลในภาชนะนั้น เราสามารถแยกคิดโดยอาศัยจาก FBD ต่าง ๆ เป็นหลัก ดังนี้

จากรูปที่ 4.2 (จ) เป็น FBD ของระบบมวลในภาชนะนั้น

$\sum F'$ คือ แรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำต่อระบบมวลภาชนะนั้น ซึ่งจะประกอบด้วย น้ำหนักของระบบมวล แรงดันเนื่องจากความดันสถิตที่ทางเข้า และทางออก และแรงปฏิกิริยาของภาชนะ (-R) ที่กระทำต่อระบบมวล

แรง $\sum \vec{F}'$ นี้ จะเป็นผลทำให้ระบบมวลที่ผ่านเข้าออกภาชนะนั้น มีการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเกิดขึ้น เมื่อพิจารณารูปที่ 4.2 (ข) และ (ค) ที่เวลา t มวล Δm จะเริ่มเข้าสู่ภาชนะด้วยความเร็ว $\vec{v}_1$ ที่เวลา $t+\Delta t$ มวล Δm จะถูกดันออกจากภาชนะด้วยความเร็ว $\vec{v}_2$ ในช่วงเวลา Δt นี้ โมเมนตัมเชิงเส้นของระบบมวลภายในภาชนะ จะไม่เปลี่ยนแปลง การเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงเส้นจะมีพียงของมวล Δm ที่เข้าและออกภาชนะเท่านั้น คือ

$$\Delta \vec{G} = (\Delta m)\vec{v}_2 - (\Delta m)\vec{v}_1 = \Delta m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

เมื่อหารตลอดด้วย Δt และกำหนดให้ $\Delta t \to 0$ จะได้ว่า

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{G}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\frac{d\vec{G}}{dt} = \frac{dm}{dt}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\dot{\vec{G}} = m'(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

จากสมการที่ 4.9 จะได้ว่า

$$\sum \vec{F}' = \dot{\vec{G}} = m'(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\sum \vec{F}' = m' \Delta \vec{v} \qquad ...(4.14)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 4/16

เนื้อหา

จากรูปที่ 4.2 (ฉ) เป็น FBD ของภาชนะ เราจะแบ่งแรงทั้งหมดที่กระทำต่อภาชนะออกเป็นสองส่วน คือ

ส่วนที่ 1. $\sum \vec{F}'$ คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อภาชนะ ซึ่งจะประกอบด้วยน้ำหนักของภาชนะและแรงที่จุดเชื่อมต่อของภาชนะกับโครงสร้างอื่น

ส่วนที่ 2. $\vec{R}$ คือ แรงปฏิกิริยาของระบบมวลที่กระทำต่อภาชนะ

ดังนั้น ในกรณีที่ภาชนะนั้นอยู่นิ่งหรือเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ จากสมการ $\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0$ จะได้ว่า

$$\sum \vec{F}'' = \vec{R} = 0 \qquad ...(4.15)$$

ถ้าเราเขียน FBD รวมของระบบมวลและตัวภาชนะ เราจะได้ดังรูป 4.2 (ช)

โดย $\sum \vec{F}$ คือ แรงภายนอกทั้งหมดที่กระทำ ซึ่งจะประกอบด้วย น้ำหนักของภาชนะ น้ำหนักของระบบมวล แรงดันเนื่องจากความดันสถิตที่เข้าและออกของภาชนะ แรงที่จุดเชื่อมต่อของภาชนะกับโครงสร้างอื่น

เมื่อรวมสมการที่ 4.14 และ 4.15 เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

$$\sum \vec{F}'' = m' \Delta \vec{v} \qquad ...(4.16)$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการ 4.10 ที่กล่าวไว้ว่า โมเมนต์ของแรงภายนอกกรอบจุด O

$$\sum \vec{M}_o = \vec{H}_o$$

จากรูปที่ 4.2 (ช) จะได้ว่า

$$\sum M_o = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) \qquad ...(4.17)$$

ในกรณีที่แรงและความเร็วต่าง ๆ ไม่ได้อยู่ในระนาบเดียวกัน สมการทั่วไป คือ

$$\sum \vec{M}_o = m'(\vec{d}_2 \times \vec{v}_2 - \vec{d}_1 \times \vec{v}_1) \qquad ...(4.18)$$

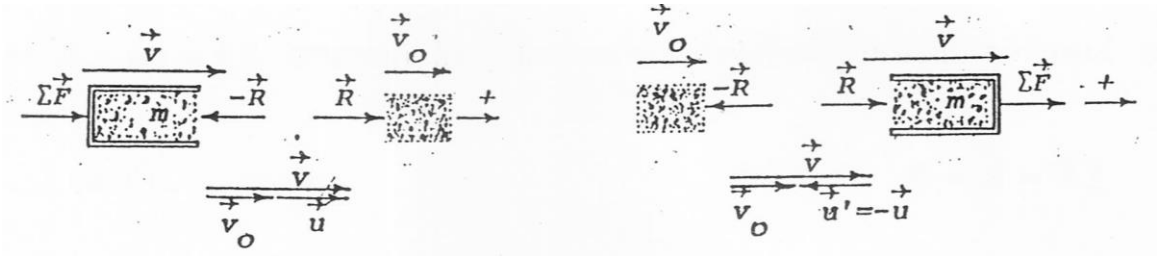
โดยที่ $\vec{d}_1$ และ $\vec{d}_2$ คือ เวกเตอร์ทางตำแหน่งจากจุด O ไปยังจุดศูนย์กลางของพื้นที่ A_1 และ A_2 ตามลำดับ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 5/16

เนื้อหา

4.5 ระบบมวลแปรผัน (Variable Mass System)

ในหัวข้อนี้เราจะได้กล่าวถึงระบบมวลที่มีการเปลี่ยนแปลงของมวลภายในปริมาตรที่กำหนด เราเรียกระบบมวลนี้ว่า ระบบมวลแปรผัน



(ก) (ข)

รูปที่ 4.3 ลักษณะของระบบมวลแปรผัน

พิจารณารูปที่ 4.3 (ก) ระบบมวล m ซึ่งมีความเร็ว $\vec{v}$ เคลื่อนที่ไปดูดกลืนมวลซึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ $\vec{v}_0$ ในทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ โดย $|\vec{v}| > |\vec{v}_0|$

เมื่อเราพิจารณามวลส่วนที่ถูกกลืน โดยระบบมวล m จากสมการที่ 4.16 แรงที่ระบบมวล m กระทำต่อมวลที่ถูกดูดกลืน เพื่อให้มวลที่ถูกดูดกลืน มีความเร็วเพิ่มขึ้นจาก $\vec{v}_0$ เป็น $\vec{v}$ คือ

$$\vec{R} = \dot{m}(\vec{v} - \vec{v}_0) = \dot{m}\vec{u}$$

โดย

$\dot{m}$ คือ อัตราการดูดกลืน หรือคืออัตราการเพิ่มขึ้นของมวลในระบบมวล m

$\vec{u}$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของระบบมวล m เทียบกับมวลที่ถูกดูดกลืน

$$\sum\vec{F} + (-\vec{R}) = m\vec{a}$$

$$\sum\vec{F} - \dot{m}\vec{u} = m\vec{a}$$

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{u} \qquad \text{...(4.19)}$$

โดย

$\sum\vec{F}$ คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อระบบมวล (ไม่รวมแรงปฏิกิริยาที่ถูกดูดกลืน คือ $-\vec{R}$)

m คือ มวลของระบบ

$\vec{a}$ คือ ความเร่งของระบบมวล m

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 6/16

เนื้อหา

ในทำนองเดียวกัน สำหรับรูปที่ 4.3 (ข) ระบบมวล m มีความเร็ว $\vec{v}$ จะมีการขับมวลออกจากระบบ มวลที่ถูกขับออก จะมีความเร็วเป็น $\vec{v}_0$ โดย $|\vec{v}| > |\vec{v}_0|$ แรงที่ระบบมวล m กระทำต่อมวลที่ถูกขับออก เพื่อให้มวลที่ถูกขับออกมีความเร็วลดลงจาก $\vec{v}$ เป็น $\vec{v}_0$ คือ

$$-(-\vec{R}) = \dot{m}(\vec{v}_0 - \vec{v}) = \dot{m}\vec{u}' = -\dot{m}\vec{u}$$

โดย

$\dot{m}$ คือ อัตราของมวลที่ถูกขับออก หรือคือ อัตราการลดลงของมวลในระบบมวล m

$\vec{u}$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของมวลที่ถูกขับออกเทียบกับระบบมวล m

เมื่อเราพิจารณาระบบมวล m จากสมการ $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ จะได้ว่า

$$\sum\vec{F} + (-\vec{R}) = m\vec{a}$$

$$\sum\vec{F} - \dot{m}\vec{u} = m\vec{a}$$

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{u} \qquad ...(4.20)$$

จะเห็นได้ว่า สมการที่ 4.19 และ 4.20 มีรูปสมการเหมือนกัน แต่จะแตกต่างกันในการแทนค่า $\dot{m}$ คือ สำหรับระบบมวลที่มีการดูดกลืนมวล $\dot{m}$ จะมีเครื่องหมายเป็นบวก และสำหรับระบบมวลที่มีการขับออก $\dot{m}$ จะมีเครื่องหมายเป็นลบ เพื่อความสะดวกในการใช้สมการที่ 4.19 และ 4.20 เราจะรวมสมการทั้งสองกรณีเข้าด้วยกัน กล่าวคือ ระบบมวลจะมีการดูดกลืนมวล และขับออกในเวลาเดียวกัน และจะเปลี่ยนเทอมต่าง ๆ ให้อยู่ในรูปที่เข้าใจได้ง่ายขึ้น ดังนี้

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{u}_i - \dot{m}_0\vec{u}_0$$

$$\sum\vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}(\vec{v} - \vec{v}_i) - \dot{m}_0(\vec{v} - \vec{v}_0) \qquad ...(4.21)$$

โดย

$\sum\vec{F}$ คือ แรงภายนอกที่กระทำต่อระบบมวล (ไม่รวมแรงปฏิกิริยาของมวลที่ถูกดูดกลืนหรือมวลที่ถูกขับออก)

m คือ มวลของระบบ

$\vec{a}$ คือ ความเร่งของระบบมวล

$\vec{v}$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์ของระบบมวล

$\dot{m}_i$ และ $\dot{m}_0$ คือ ขนาดของอัตรามวลที่ถูกดูดกลืนหรือขับออกจากระบบมวลตามลำดับ

$\vec{v}_i$ และ $\vec{v}_0$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์ของมวลที่จะถูกดูดกลืนและหลังจากที่ถูกขับออกจากระบบมวลตามลำดับ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 7/16

เนื้อหา

ข้อสังเกต :

สำหรับระบบมวลแปรผันนี้ เราไม่สามารถใช้สมการของอิมพัลส์และโมเมนตัมของระบบมวล m ได้ ทั้งนี้เนื่องจากจะทำให้เกิดข้อผิดพลาดดังนี้ คือ

จากสมการ

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}$$

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

ในกรณีที่ระบบมวลมีการดูดกลืน

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v} = m\vec{a} + \dot{m}_i\vec{v}$$

และในกรณีที่ระบบมวลมีการขับมวลออก

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}\vec{v} = m\vec{a} - \dot{m}_0\vec{v}$$

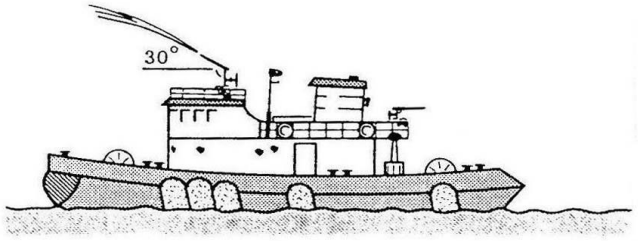
ซึ่งจะเห็นได้ว่าได้ผลไม่ตรงกับสมการที่ 4.19 และ 4.20 ตามลำดับ ทั้งนี้จะแตกต่างกันที่เทอมสุดท้าย คือ $\dot{m}\vec{v}$ และ $\dot{m}\vec{u}$ แต่เนื่องจาก $\dot{m}\vec{u} = \dot{m}(\vec{v} - \vec{v}_0)$ ดังนั้น สมการอิมพัลส์และโมเมนตัมจะใช้ได้กับระบบมวลแปรผันก็เฉพาะในกรณีที่มวลที่ถูกดูดกลืน หรือมวลที่ถูกขับออกมีความเร็ว $\vec{v}_0$ เท่ากับศูนย์ กล่าวคือ $\dot{m}\vec{u} = \dot{m}(\vec{v} - 0) = \dot{m}\vec{v}$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 8/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1

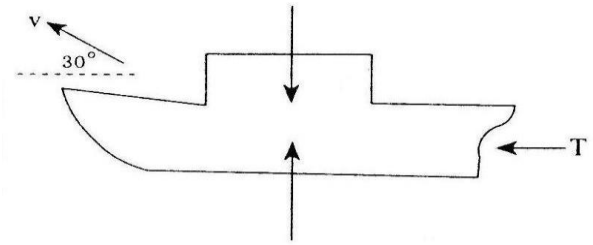
เรือดับเพลิงฉีดน้ำทะเล (ความหนาแน่น 1030 kg/m^3) จากหัวฉีดด้วยความเร็ว 40 m/s ในอัตรา 0.080 m^3/s จงหาแรงขับของเครื่องยนต์ที่จะทำให้เรือลอยนิ่งอยู่ได้



หลักการวิเคราะห์

ให้พิจารณาผังวัตถุอิสระของเรือภายใต้แรงขับดัน T ในแนวระดับ

การคำนวณ



$$m' = \rho vA = \rho Q$$

$$= 1030(0.080)$$

$$= 82.4 \text{ kg/s}$$

$[\sum F_x = m'\Delta v_x]$;

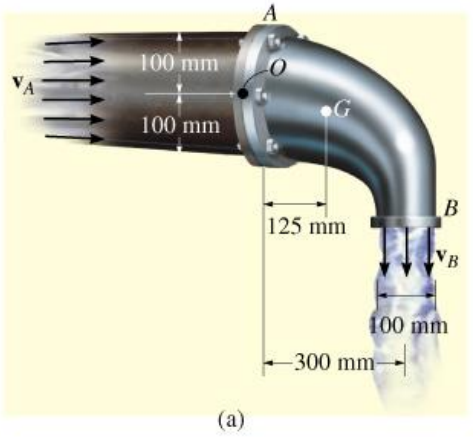
$$T = 82.4\,(40 \cos 30^\circ - 0)$$

$$= 2854.4 \text{ N}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 9/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 ถ้าความดันสถิต(Static gauge Pressure) ที่จุด A เท่ากับ 100 kPa. และอัตราการไหล (Mass Flow Rate) ของน้ำที่ท่อทางออก (จุด B) $Q_B = 0.2\ m^3/s$ (กำหนดให้ความหนาแน่นของน้ำ $\rho_W = 1000\ \frac{kg}{m^3}$) และมวลของน้ำที่จุดศูนย์กลางมวล (Center of Mass at G) เท่ากับ 20 kg. จงหาส่วนประกอบของแรงปฏิกิริยาซึ่งกระทำกับข้อต่อของท่อที่จุด A ดังแสดงในภาพ



วิธีทำ

1) จากสมการการไหลของมวล แบบทรงตัวมั่น นั่นคือ $Q_A = Q_B = Q$ ดังนั้น

$$\frac{dm}{dt} = \rho_W Q = (100\frac{kg}{m^3})(0.2\frac{m^3}{s}) = 200\ \frac{kg}{s}$$

หาความเร็วของน้ำที่จุด A และ B จาก

$$V_B = \frac{Q}{A_B} = \frac{0.2\,m^3/s}{(0.05m)^2\,\pi} = 25.46\ m/s\downarrow$$

$$V_A = \frac{Q}{A_A} = \frac{0.2\,m^3/s}{(0.1m)^2\,\pi} = 6.37\ m/s\rightarrow$$

2) หาขนาดของแรงซึ่งกระทำที่จุด A (F_A) จากสมการ $F_A = (P_A)(A_A)$

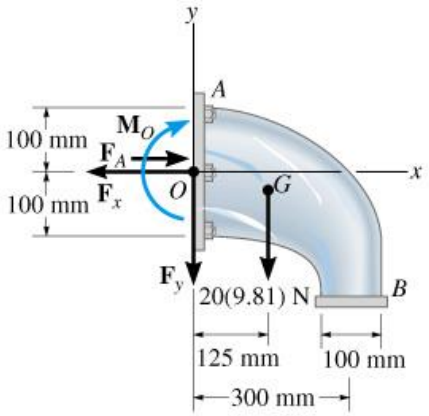
แทนค่าลงในสมการจะได้

$$F_A = (P_A)(A_A) = [100 \times 10^3\ N/m^2] \times [\pi\ (0.1\ m)^2] = 3141.6\ N$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 10/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 (ต่อ)



(b)

และเมื่อพิจารณาจาก FBD จะพบว่า ขนาดของแรง F_A จะประกอบด้วยแรงย่อย 2 แรง คือ F_X และ F_Y ส่วนที่จุด B นั้น ค่าความดันสถิต มีค่าเป็นศูนย์ ($P_B = 0$) เนื่องจากที่จุด B เป็นความดันบรรยากาศ และจากสมการการไหลแบบทรงตัวมั่น (Equation of Steady Flow) จะได้

$$+\sum F_X = \frac{dm}{dt}(V_{BX} - V_{AX})$$

ดังนั้น

$-F_X + 3141.6 = 200 \text{ kg/s} (0 - 6.37 \text{ m/s})$; $F_X = 4.41$ kN. **ตอบ**

และขนาดของแรงย่อยในแนวแกน y หาได้จากสมการดังต่อไปนี้

$$+\sum F_Y = \frac{dm}{dt}(V_{BY} - V_{AY})$$ ดังนั้น

$-F_Y - 20(9.81) \text{ N} = 200 \text{ kg/s} (- 25.46 \text{ m/s} - 0)$; $F_Y = 4.90$ kN. **ตอบ**

และหาโมเมนต์รอบจุด O เนื่องจากการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของน้ำที่ไหลจาก จาก จุด A ไป B คือ

$$+\sum M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}V_B - d_{OA}V_A)$$

แทนค่าลงในสมการ $M_O + 20(9.81) \text{ N} (0.125 \text{ m}) = 200 \text{ kg/s} [(0.3 \text{ m}) \times (25.46 \text{ m/s}) - 0]$

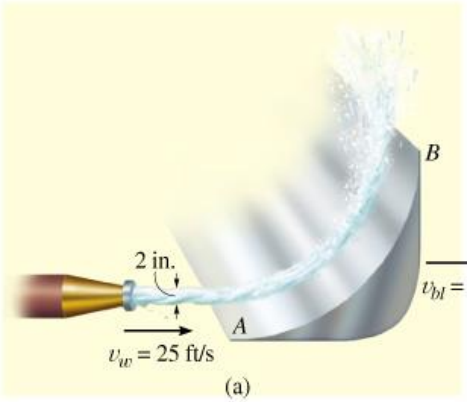
จากการแก้สมการ $M_O = 1.50$ kN.m **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 11/16

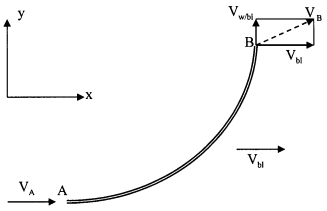
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3

หัวเจทฉีดน้ำใส่ใบพัดที่รูปร่างดังแสดงในภาพ ด้วยความเร็วที่จุด A ($V_A = 7.5$ m/s) ซึ่งทำให้ใบพัดเคลื่อนที่ไปข้างหน้า ด้วยความเร็ว 1.5 m/s จงคำนวณหาแรงย่อยในแนวแกน X (F_x) และแรงย่อยในแนวแกน Y (F_y) และจงหากำลังที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของใบพัดนี้



วิธีทำ



จาก FBD ความเร็ว $V_A = 7.5i$ m/s

และจากการสัมพัทธ์ความเร็วของน้ำที่พุ่งออกจากหัวฉีดและความเร็วของใบพัดที่เกิดจากแรงของน้ำที่กระทำกับใบพัด

$$V_{W/bl} = V_W - V_{bl} = 7.5i - 1.5i = 6i$$

แต่เนื่องจากใบพัดมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $V_{bl} = 1.5i$ m/s ดังนั้นความเร็วที่ของน้ำที่จุด B จึงหาได้จาก

$$V_B = V_{bl} - V_{W/bl} = [\,1.5i + 6j\,] \text{ m/s}$$

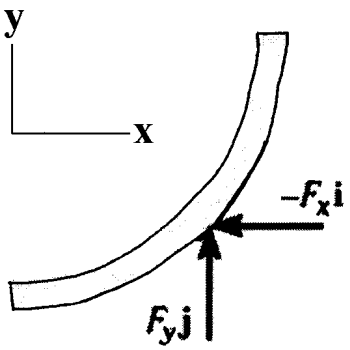
ดังนั้นอัตราการไหลของน้ำที่ออกจากหัวเจทสู่ใบพัดหาได้จาก

$$\frac{dm}{dt} = \rho_W (V_{W/bl}) A_A = \frac{10 \times 10^3}{9.81}(6)\left[\pi\left(\frac{25}{1000}\right)^2\right] = 12.0 \text{ kg/s}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 12/16

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 (ต่อ)



พิจารณาจาก FBD จะพบว่า แรงกิริยาที่เกิดจากการฉีดของน้ำกระทำกับใบพัดนั้น มีสองแรงย่อย คือ แรงในแนวแกน X (F_X) และแรงในแนวแกน Y (F_Y)

และจากสมการการไหลแบบ Steady Flow

$$\Sigma F = \frac{dm}{dt}(V_B - V_A)$$

$-F_X i + F_Y j = 12.0\,(1.5i + 6j - 7.5i)$

ดังนั้นแรงปฏิกิริยาในแต่ละแนวแกนมีค่าเท่ากับ

$F_X = 12(6) = 72$ N $\leftarrow$

$F_Y = 12(6) = 72$ N $\uparrow$

หากำลังที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของใบพัด ซึ่งจากการพิจารณาการเคลื่อนที่ของใบพัดนั้นพบว่าหลังจากที่หัวเจทฉีดน้ำใส่ใบพัด จะทำให้ใบพัดนั้น มีการเคลื่อนที่เฉพาะในแนวแกน X ดังนั้น กำลังที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของใบพัดจะมีค่าเท่ากับ

$P = F \cdot V = (72\text{ N}) \cdot (1.5\text{ m/s}) = 108$ W. **ตอบ**

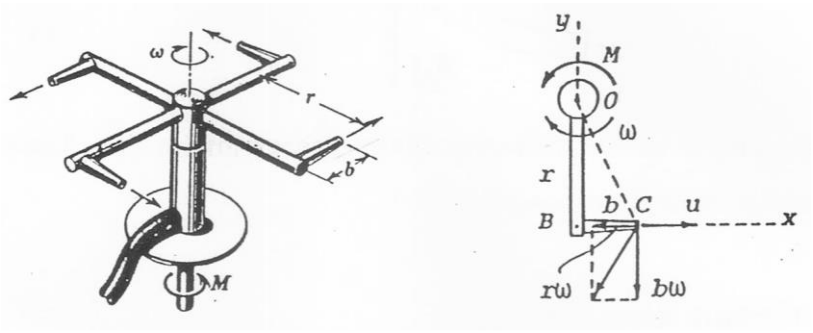
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 13/16

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยการแสดงวิธีทำ

ข้อที่ 1 : Sprinkler หมุนด้วยความเร็วคงที่ ω และจ่ายน้ำออกในอัตราปริมาตรการไหล Q หัวฉีดทั้งสี่มีพื้นที่หน้าตัดที่ทางออกเท่ากับ A จงหาโมเมนต์ M ที่ใส่ให้แก่เพลาที่ให้ Sprinkler หมุนด้วยความเร็วดังกล่าว และสำหรับค่าความดันและอัตราการไหล Q ที่กำหนดให้ จงหาอัตราการหมุน ω_O ของ Sprinkler ที่เกิดขึ้น เมื่อใส่โมเมนต์ให้แก่เพลา กำหนดให้ความหนาแน่นมวลของน้ำเป็น ρ

ตอบ. [$\omega = \omega_O = \dfrac{Qr}{4A(b^2 + r^2)}$]



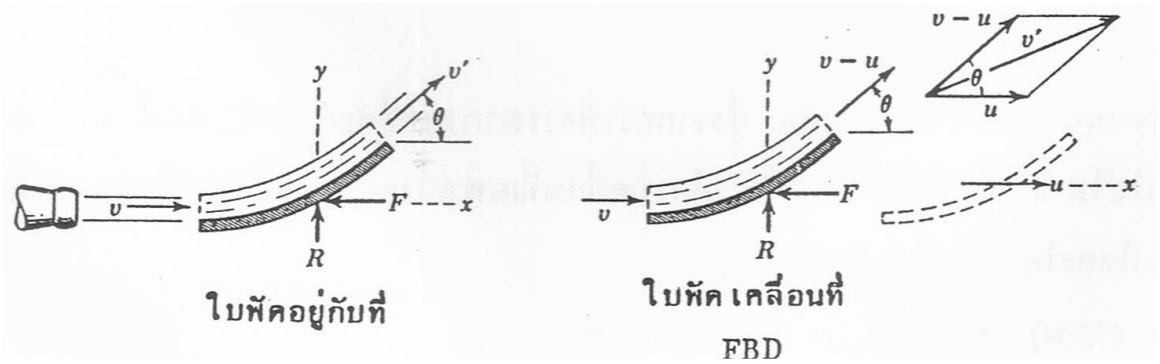
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ข้อที่ 2 :ไอน้ำจากหัวฉีดพื้นที่หน้าตัด A พุ่งเข้ากระทบใบจักรด้วยความเร็ว v ถ้าไอน้ำมีความหนาแน่นเป็น ρ จงหา A) แรงในแนวย่อย F และ R ที่ยึดติดให้ใบจักรอยู่กับที่

ตอบ. [$F = \rho A v^2 (1-\cos\theta)$, $R = \rho A v^2 \sin\theta$]

B) แรงที่ทำให้ใบจักรมีความเร็วคงที่ u โดย $u < v$ และมีทิศทางเดียวกับ v

ตอบ. [$F = \rho A(v-u)^2 (1-\cos\theta)$, $R = \rho A (v-u)^2 \sin\theta$]



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

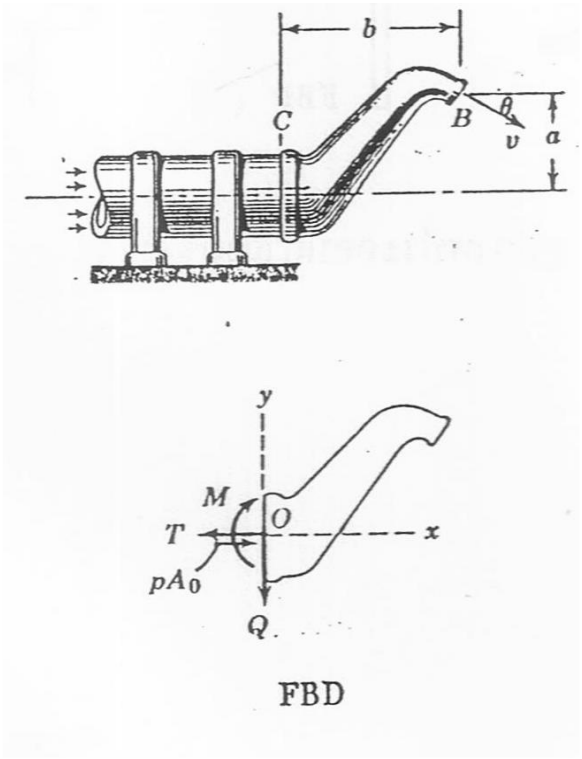
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 14/16

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3. หัวฉีดดังรูป มีพื้นที่ทางออกที่ปลาย B เท่ากับ A และมีพื้นที่ทางเข้าที่ C เท่ากับ A_O ของเหลวที่จะเข้าหัวฉีด มีความดันเกจ P และพุ่งออกจากหัวฉีดด้วยความเร็ว v ในทิศทางดังรูป ถ้าของเหลวมีความหนาแน่นคงที่ ρ จงหา ความตึง T แรงเฉือน Q และโมเมนต์บิด M ของท่อที่ C

ตอบ. $T = P A_O + \rho A v^2 \left(\frac{A}{A_O} - \cos\theta\right)$, $Q = \rho A v^2 \sin\theta$

$M = \rho A v [(va\cos\theta + vb\sin\theta) - 0]$



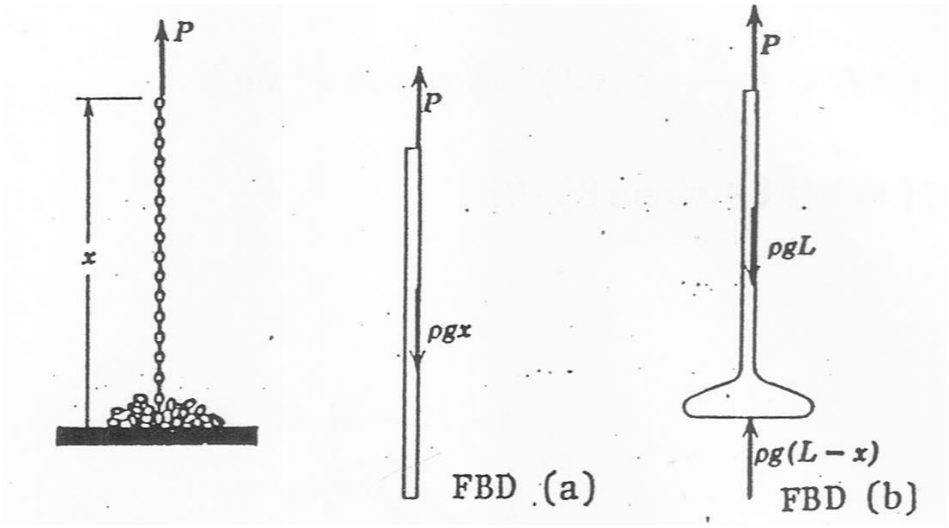
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 15/16

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 . โซ่เส้นหนึ่งยาว L มีมวล ρ ต่อหนึ่งหน่วยความยาว ถูกดึงขึ้นด้วยแรง P โดยให้มีความเร็วคงที่ v จงหาแรง P ในเทอมของระยะ x และหาพลังงานที่สูญเสีย

ตอบ. [$P = \rho(gx + v^2)$, $\Delta E = \frac{1}{2}\rho Lv^2$]



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 4

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 297-232
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 138-140,146-148
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 268-293
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 263-264</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 12
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 12
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 12</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 13	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 5 จลนศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 1/14

ชื่อบทเรียน

5.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ

5.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

5.3 จุดหมุนชั่วขณะ

จุดประสงค์การสอน

5.1 เข้าใจการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบได้ถูกต้อง

5.1.1 อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ

5.1.2 จำแนกลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ

5.2 เข้าใจการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่ได้ถูกต้อง

5.2.1 อธิบายลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

5.2.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

5.2.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

5.3 เข้าใจการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้จุดหมุนชั่วขณะได้ถูกต้อง

5.3.1 อธิบายความหมายของจุดหมุนชั่วขณะ

5.3.2 อธิบายการหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่โดยใช้จุดหมุนชั่วขณะ

5.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้จุดหมุนชั่วขณะ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 2/14

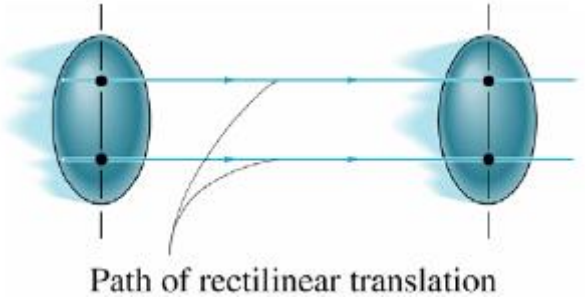
เนื้อหา

5.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ

การเคลื่อนที่ (Motion) คือ การที่วัตถุเปลี่ยนตำแหน่งที่อยู่ไปจากตำแหน่งเดิม การเคลื่อนที่ซึ่งแบ่งออกตามลักษณะของการเคลื่อนที่ สามารถแบ่งออกได้ 4 ลักษณะ คือ

1. การเลื่อนตำแหน่งในแนวเส้นตรง (Rectilinear Translation)

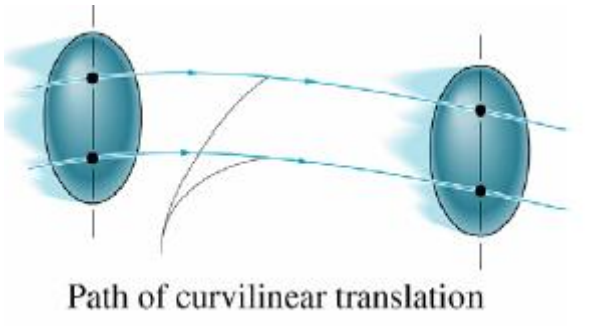
คือ การเคลื่อนที่ซึ่งทุกเส้นบนวัตถุเกร็งจะอยู่ในแนวขนานกับตำแหน่งเดิมตลอดเวลา (ไม่มีการหมุนหรือการเคลื่อนที่เชิงมุมของเส้นใด ๆ บนวัตถุเกร็ง) และทุก ๆ จุดบนวัตถุเกร็งจะเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงที่ขนานกัน



รูปที่ 5.1 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่แบบการเลื่อนตำแหน่งในแนวเส้นตรง

2. การเลื่อนตำแหน่งในแนวเส้นโค้ง (Curvilinear Translation)

คือ การเคลื่อนที่ซึ่งทุกเส้นบนวัตถุเกร็งจะอยู่ในแนวขนานกับตำแหน่งเดิมตลอดเวลา (ไม่มีการหมุนหรือการเคลื่อนที่เชิงมุมของเส้นใด ๆ บนวัตถุเกร็ง) และทุก ๆ จุดบนวัตถุเกร็งจะเคลื่อนที่ในแนวเส้นโค้งที่เหมือนกัน



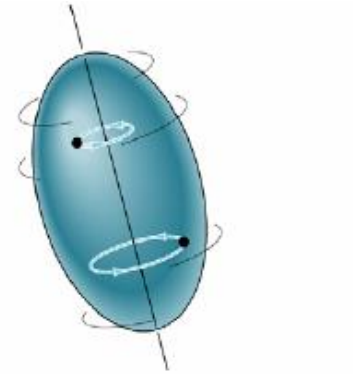
รูปที่ 5.2 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่แบบการเลื่อนตำแหน่งในแนวเส้นโค้ง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 3/14

เนื้อหา

3. การหมุนรอบแกนคงที่ (Fixed axis rotation)

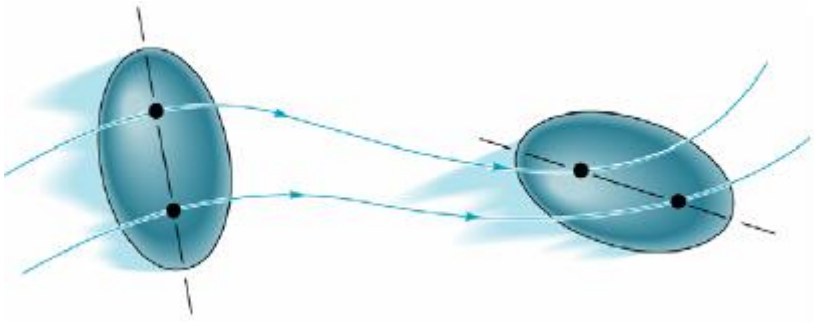
คือการเคลื่อนที่เชิงมุมรอบแกนคงที่ใด ๆ ซึ่งทุก ๆ เส้นบนวัตถุเกร็ง (รวมเส้นที่ไม่ผ่านแกนหมุนด้วย) จะกวาดไปเป็นมุมเท่ากันในช่วงเวลาของการเคลื่อนที่เดียวกัน และทุก ๆ จุดบนวัตถุเกร็งเคลื่อนที่ไปบนทางเดินที่เป็นวงกลมรอบแกนหมุน (จุดหมุน)



รูปที่ 5.3 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่แบบการหมุนรอบแกนคงที่ (Rotation about a fixed axis)

4. การเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ (General Plane in Motion)

คือ การเคลื่อนที่ในระนาบซึ่งไม่ใช่การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งและแบบหมุนรอบแกนคงที่ แต่จะเป็นการเคลื่อนที่ซึ่งรวมทั้งการเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่งและแบบหมุนเข้าด้วยกัน



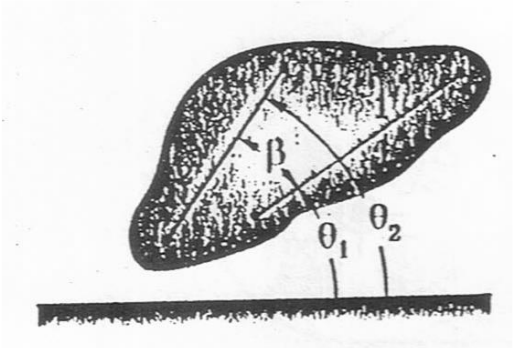
รูปที่ 5.4 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ (General Plane Motion)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 4/14

เนื้อหา

5.2 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

ในกรณีที่วัตถุเกร็งมีการเคลื่อนที่เชิงมุมเกิดขึ้น เช่น การหมุนรอบแกนคงที่ หรือการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ สิ่งที่ต้องทราบก็คือว่า เส้นตรงทุกเส้นบนวัตถุเกร็ง ซึ่งเคลื่อนที่ในระนาบจะมีการขจัดเชิงมุม ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมเท่ากันหมด



รูปที่ 5.5 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

พิจารณารูปที่ 5.5 เส้น 1 และ 2 บนวัตถุเกร็งมีตำแหน่งเชิงมุม θ_1 และ θ_2 วัดจากแนวอ้างอิงคงที่ตามลำดับและอยู่ห่างกันเป็นมุม β ซึ่งจะคงที่ตลอดเวลา

นั่นคือ

$$\theta_2 = \theta_1 + \beta$$

ดังนั้น

$$\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1 + 0$$

และ $$\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$$

หรือในช่วงเวลาใด ๆ จะได้ $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$ ดังนั้น $\omega_1 = \omega_2$ และ $\alpha_1 = \alpha_2$

ในกรณีของการเคลื่อนที่เชิงมุมรอบแกนคงที่ ความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเชิงเส้นและปริมาณเชิงมุมของจุดบนวัตถุ ในรูปของเวกเตอร์ มีดังนี้

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad , \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \; , \; \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

เมื่อ

$\vec{v}, \vec{a}$ คือ ความเร็วเชิงเส้นและความเร่งเชิงเส้นของจุดบนวัตถุเกร็งตามลำดับ

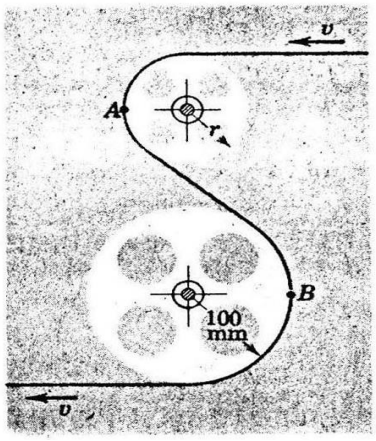
$\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ คือ ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของวัตถุเกร็งตามลำดับ

$\vec{r}$ คือ เวกเตอร์ความยาวจากแกนหมุนไปยังจุดบนวัตถุเกร็งนั้น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 5/14

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 เทปแม่เหล็กถูกพันรอบจานตามรูป ถ้าความเร็ว v ของเทปคงที่ และถ้าความเร่งของจุด A มีค่าเป็น $\frac{4}{3}$ เท่าของความเร่งของจุด B จงหารัศมี r ของจานอันเล็ก



หลักการวิเคราะห์

หาความเร่งของจุด A และ B ในเทอมของความเร็ว v แล้วใช้ความสัมพันธ์ของค่าความเร่งของจุด A และ B ที่กำหนดให้เพื่อหารัศมี r ที่ต้องการ

การคำนวณ

เนื่องจากความเร็ว v มีค่าคงที่ จะได้

$$a = a_n = \frac{v^2}{r}$$

สำหรับจุด A ; $a_A = \frac{v^2}{r}$

สำหรับจุด B ; $a_B = \frac{v^2}{100}$

จากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ จะได้

$$a_A = \frac{4}{3} a_B$$

$$\frac{v^2}{r} = \frac{4}{3}\left[\frac{v^2}{100}\right]$$

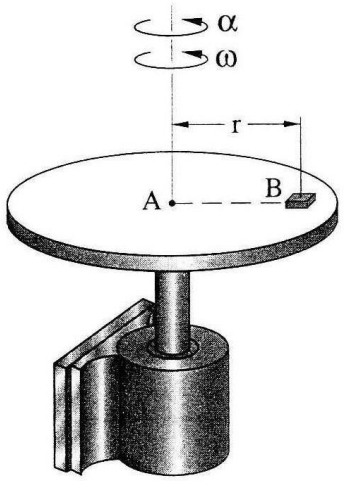
$$r = \frac{100}{4/3}$$

$$= 75 \text{ มลลิเมตร}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 6/14

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 จานกลมเริ่มหมุนจากตำแหน่งหยุดนิ่งที่เวลา $t = 0$ ด้วยความเร่งคงที่ $5\ rad/s^2$ ถ้ามวล B บนจานซึ่งวางอยู่ที่ตำแหน่ง $r = 250\ mm$ จะเริ่มไถลเมื่อความเร่งรวมของมวล B เท่ากับ $4 m/s^2$ จงหาเวลาและความเร็วเชิงมุมของจานเมื่อมวล B เริ่มไถล



<u>วิธีทำ</u>

มวล B มีทางเดินเป็นวงกลมรอบจุด A รัศมีเท่ากับ $r = 250\ mm$ ดังนั้น

$$a_B = \sqrt{(a_B)^2 + (a_B)_n^2}$$

$$(a_B)_t = r\alpha = 0.25(5) = 1.25 m/s^2$$

เมื่อเริ่มไถล $a_B = 4 m/s^2$ จะได้

$$(a_B)_n = \sqrt{(4^2) - (1.25^2)} = 3.80 m/s^2$$

$\left[a_n = r\omega^2\right]$ $\quad 380 = 0.25\omega^2$

$$\omega = 3.90 rad/s$$

$\left[\omega = \omega_0 + \alpha t\right]$ $\quad 3.90 = 0 + 5t$

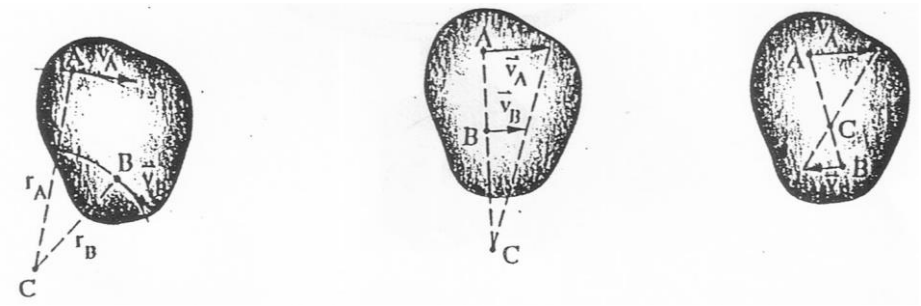
$$t = 0.78 s$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 7/14

เนื้อหา

5.3 จุดหมุนชั่วขณะ (Instantaneous Center of Zero Velocity)

ในหัวข้อที่ผ่านมาความเร็วของจุดบนวัตถุหาได้โดยการเทียบกับความเร็วของจุดอ้างอิงที่กำหนดขึ้น ในหัวข้อนี้เราจะทำให้ง่ายขึ้นโดยเราจะเลือกใช้จุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์ในขณะนั้นเป็นจุดอ้างอิง จุดอ้างอิงนี้เรียกว่า จุดหมุนชั่วขณะ ดังนั้นวัตถุก็จะมีการเคลื่อนที่โดยการหมุนรอบจุดอ้างอิงชั่วขณะ ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไปจุดหมุนชั่วขณะก็จะเปลี่ยนไป (ยกเว้นการเคลื่อนที่แบบ Fixed – Axis Rotation) และจุดหมุนชั่วขณะนี้จะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในวัตถุหรือนอกวัตถุก็ได้



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 5.6 แสดงตำแหน่งของจุดหมุนชั่วขณะ

การหาจุดหมุนชั่วขณะ C ให้พิจารณารูป 5.6 (ก) สมมุติให้จุด A และ B มีความเร็ว $\vec{v}_A$ และ $\vec{v}_B$ ตามลำดับ หากพิจารณาให้จุด A ในขณะนั้นหมุนเป็นวงกลมรอบจุด ๆ หนึ่ง จุดดังกล่าวจะต้องอยู่ในแนวเส้นตั้งฉากกับ $\vec{v}_A$ ในทำนองเดียวกันจุด B ก็จะมีลักษณะเช่นเดียวกับ A ดังนั้นเมื่อเราลากเส้นตั้งฉากกับความเร็ว $\vec{v}_A$ และ $\vec{v}_B$ มาตัดกันที่จุด C เราจะได้จุด C เป็นจุดหมุนชั่วขณะ จุด C นี้จะเปรียบเสมือนเป็นจุดหมุนของทุก ๆ จุดบนวัตถุนั้น สามเหลี่ยม ABC ในขณะนั้นถือได้ว่าเป็นส่วนต่อของวัตถุ เส้น CA, CB และ AB หรือเส้นอื่น ๆ บนวัตถุในขณะนั้นจะมีความเร็วเชิงมุม ω เท่ากัน นั่นคือ

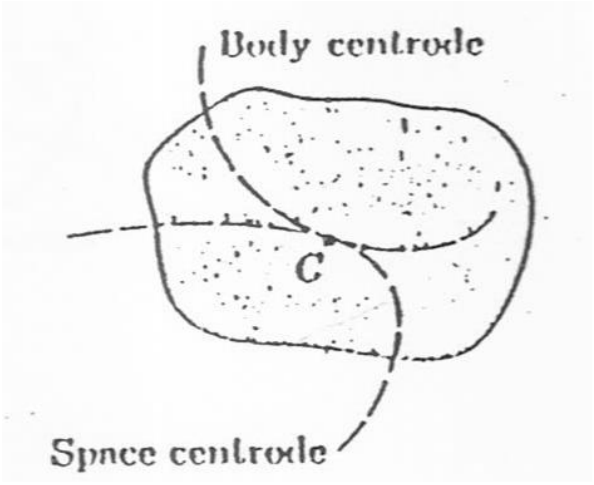
$$\omega = \frac{v_A}{r_A} = \frac{v_B}{r_B} = \omega_{AB}$$

ในกรณีที่ความเร็วของสองจุดบนวัตถุอยู่ในแนวขนานกัน จุดหมุนชั่วขณะ C ก็สามารถหาได้ดังรูป 5.6 (ข) และ (ค)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 8/14

เนื้อหา

ขณะที่วัตถุเคลื่อนที่ไป จุด C ทั้งในระวางที่ (Space) และบนวัตถุจะเปลี่ยนตำแหน่งไป โลกัสของจุด C ใน Space เรียกว่า Space Centrode และโลกัสของจุด C บนวัตถุ หรือ ส่วนต่อของวัตถุเรียกว่า Body Centrode ที่ขณะเวลาหนึ่งใด ๆ Curve ทั้งสองจะสัมผัสกันที่ตรงตำแหน่ง C ดังนั้นในช่วงของการเคลื่อนที่ Body Centrode Curve ก็จะกลิ้งไปบน Space Centrode Curve ดังรูปที่ 5.7



รูปที่ 5.7 การเปลี่ยนแปลงตำแหน่งของจุดหมุนชั่วขณะ

ข้อสังเกต :

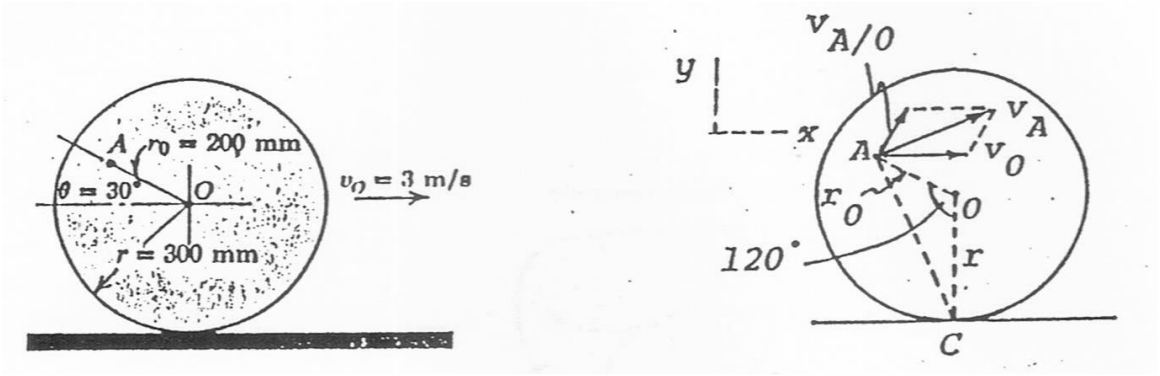
จุดหมุนชั่วขณะคือจุดที่มีความเร็วเป็นศูนย์หรือเป็นจุดหยุดนิ่งในขณะนั้นก็จริง แต่ความเร่งในขณะนั้นจะไม่เป็นศูนย์ เราจึงใช้จุดหมุนชั่วขณะเป็นจุดความเร่งศูนย์ชั่วขณะ เพื่อหาความเร่งของจุดอื่น ๆ ในลักษณะเช่นเดียวกับการใช้จุด C ไม่ได้ ในการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ (General Plane Motion) จุดความเร่งศูนย์ชั่วขณะจะไม่เกิดขึ้น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 9/14

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3

วงล้อรัศมี $r = 300$ mm กลิ้งไปทางขวามือด้วยความเร็ว $v_O = 3$ m/s โดยไม่เกิดการไถล จงหาความเร็วของจุด A ในขณะที่วงล้ออยู่ในตำแหน่งดังรูป



วิธีทำ :

วิธีหาความเร็วสัมพัทธ์โดยใช้เรขาคณิตและปริมาณสเกลาร์ เลือกจุด O เป็นจุดอ้างอิง

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/O}$$

ความเร็วเชิงมุมของเส้น AO จะเท่ากับของวงล้อ

คือ $\omega = \dfrac{v_O}{r} = \dfrac{3}{0.3} = 10$ rad/s

$[v_{A/O} = r_O \dot{\theta}] \Rightarrow v_{A/O} = 0.2\,x\,(10) = 2$ m/s

จากรูป Δ ความเร็วโดย Cosine's Law จะได้

$$v_A^2 = v_O^2 + v_{A/O}^2 - 2v_O v_{A/O}\cos 120$$
$$v_A^2 = (3)^2 + (2)^2 - 2\,(3)(2)\cos 120$$
$$v_A = 4.36 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 10/14

เนื้อหา

วิธีที่ 2 :

วิธีหาความเร็วสัมพัทธ์โดยใช้ปริมาณเวกเตอร์

ในที่นี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_O + \vec{v}_{A/O} = \vec{v}_O + (\omega \times \vec{r}_O)$$

เมื่อ

$$\vec{\omega} = -10\ k\ \text{rad/s}\ ,\ \vec{v}_O = 3i\ \ \text{m/s}$$

$$\vec{r}_O = 0.2(-i\cos 30 + j\sin 30) = (-0.173)i + (0.1)j\ \ \text{m/s}$$

$$\vec{v}_A = (3)i + (-10)\,k \times (-0.173i + 0.1j) = 4i + 1.73j\ \ \text{m/s}$$

$$v_A = \sqrt{(4)^2 + (1.732)^2} \ = \ 4.36\ \ \text{m/s}$$ **ตอบ**

วิธีที่ 3 : วิธีจุดหมุนชั่วขณะ

ในที่นี้ ล้อกลิ้งไปโดยไม่เกิดการไถล ดังนั้นที่จุดสัมผัสระหว่าพื้นและวงล้อจะต้องมีความเร็วเท่ากันคือเท่ากับศูนย์ (จุดบนพื้นมีความเร็วเป็นศูนย์) นั้นคือ จุด C เป็นจุดชั่วขณะ ความเร็วของ AO และ AC หรือของวงล้อจะมีค่าเท่ากัน คือ 10 rad/s ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ความเร็วของจุด A จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับ AC มีขนาด $v_A = 10$ rad/s

จากรูป $\quad AC^2 = (OC + AO\sin 30)^2 + (AO\cos 30)^2$

$$AC^2 = (0.3 + 0.2\sin 30)^2 + (0.2\cos 30)^2\ ,\ AC = 0.436\ \text{m}$$

$$v_A = 10(0.436) = 4.36\ \text{m/s}$$ **ตอบ**

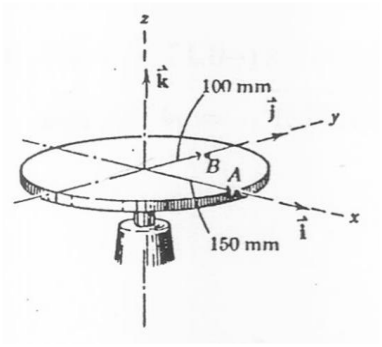
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 13 เลขหน้า 11/14

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยการแสดงวิธีทำ

ข้อที่ 1. จานกลมหมุนรอบแกนตั้งฉาก z ที่ขณะหนึ่ง ความเร็วของจุด B บนจาน คือ $\vec{v}_B = 0.4\vec{i}$ m/s และความเร่งในแนวสัมผัสของจุด ของ A คือ $\vec{a}_{At} = 1.8\vec{j}$ m/s จงหาความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ และ $\vec{a}_B$ ในรูปของเวกเตอร์ในขณะนั้น

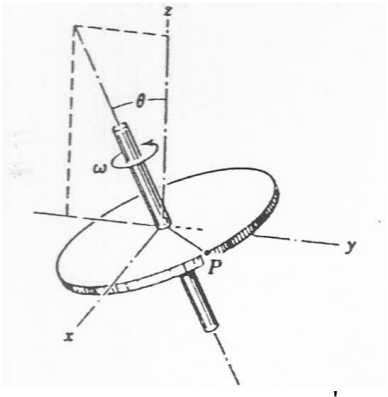
ตอบ. $\vec{a}_B = -1.2\vec{i} - 1.6\vec{j}$ m/s^2



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ข้อที่ 2. จานกลมหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ $\omega = 50$ rad/s รอบแกนตามรูป ซึ่งทำมุม $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ กับระนาบ y - z จงหาความเร็วและความเร่งของจุด P ในรูปของเวกเตอร์ที่ P มีตำแหน่งซึ่งกำหนดด้วยเวกเตอร์ $\vec{r} = 60\vec{i} + 64\vec{j} + 48\vec{k}$ mm

ตอบ. $\vec{a} = -150\vec{i} - 160\vec{j} - 120\vec{k}$ m/s^2



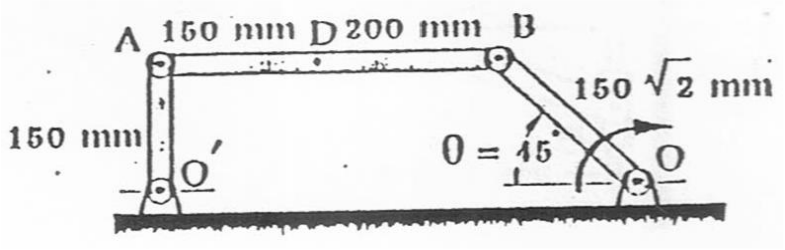
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 12/14

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : แขน OB ของกลไกมีความเร็วเชิงมุมตามเข็มนาฬิกาเท่ากับ 10 rad/s ในตำแหน่งดังรูป เมื่อ $\theta = 45^{o}$ จงหาความเร็วของ A ความเร็วของ D และความเร็วเชิงมุมของแขน AB

ตอบ. $v_A = (0.350)(4.29) = 1.501$ m/s , $v_D = (0.381)(4.29) = 1.630$ m/s



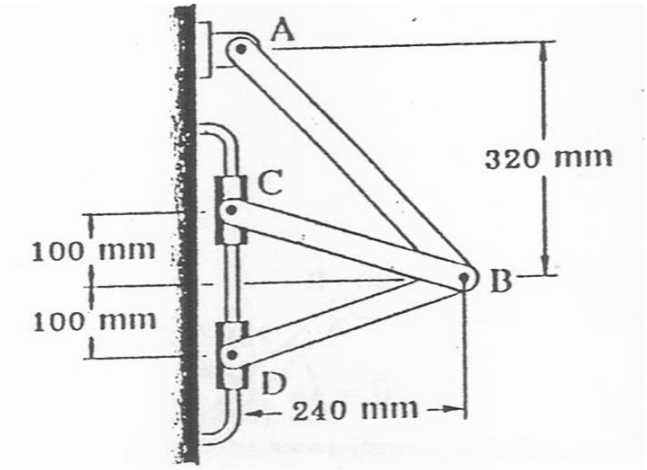
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 13/14

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : ปลอก C และ D เลื่อนบนราวในแนวดิ่ง ถ้าปลอก C มีความเร็ว 660 mm/s ในทิศทางลง จงหาความเร็วของ D และความเร็วเชิงมุมของแขน AB ในขณะนั้น

ตอบ. $\omega_{AB} = \frac{v_B}{AB} = \frac{0.5}{0.4} = 1.25 \text{ rad/s}$ (ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 4

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 154-163
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 280
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 297-307,315-324
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 294</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 13
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 13
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 13</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 14	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 5 จลนศาสตร์ของอนุภาค	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 1/17

ชื่อบทเรียน

5.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

จุดประสงค์การสอน

5.4 เข้าใจการหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง

5.4.1 อธิบายความแตกต่างระหว่างการเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์กับแบบสัมพัทธ์

5.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์

5.4.3 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงขนานกับแนวเดิม

5.4.4 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงหมุน

5.4.5 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของการเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 2/11

เนื้อหา

5.4 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

การวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบนั้น เราสามารถแยกวิธีการวิเคราะห์ออกเป็น 2 แบบ คือ 1. การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์

2. การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์

2.1 แบบแกนอ้างอิงคงที่ขนานกับแนวเดิม (Translating)

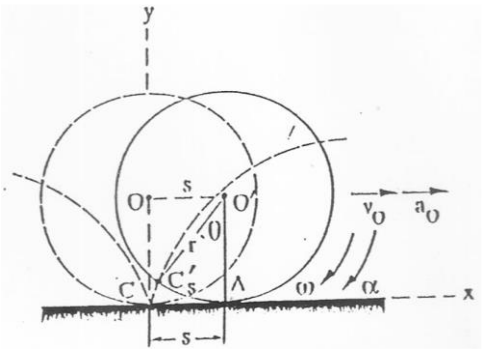
2.2 แบบแกนอ้างอิงเคลื่อนที่หมุน

1. การวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมบูรณ์

การวิเคราะห์หาความเร็วสัมบูรณ์ ความเร่งสัมบูรณ์ ทั้งเชิงเส้นและเชิงมุมของวัตถุเกร็ง ซึ่งเคลื่อนที่อยู่ในระนาบ มีขั้นตอนการคำนวณคือ เราจะเริ่มด้วยการสร้างสมการความสัมพันธ์ทางเรขาคณิตของการขจัดเสียก่อน เมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งเทียบกับเวลา ก็จะได้ความเร็วและเมื่อหาอนุพันธ์อันดับที่สองเทียบกับเวลา ก็จะได้ความเร่ง

ตัวอย่างที่ 1 ล้อกลมมีรัศมี r กลิ้งไปบนพื้นราบโดยไม่เกิดการไถล จงหาความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่เชิงมุมของล้อกับการเคลื่อนที่เชิงเส้นของจุดศูนย์กลาง O และให้หาความเร่งของจุดที่ขอบล้อ ขณะที่จุดนั้นสัมผัสพื้น

วิธีทำ



จากรูปเมื่อล้อกลิ้งไปทางขวามือ จากตำแหน่งเส้นประไปยังตำแหน่งเส้นทึบ โดยไม่เกิดการไถล การขจัดเชิงเส้นของจุดศูนย์กลาง O คือ s จะเท่ากับความยาวของส่วนโค้ง $C'A$ เส้นรัศมี OC จะหมุนไปเป็นมุม θ วัดเทียบกับแนวดิ่งมาอยู่ในตำแหน่ง $O'C'$ ความยาวส่วนโค้ง $C'A$ จะเท่ากับ $r\theta$ ดังนั้น เราจะได้ความสัมพันธ์ทางเรขาคณิต คือ

$$s = r\theta$$

$$\dot{s} = v_O = r\dot{\theta} = r\omega \ , \ v_O = r\omega$$

$$\ddot{s} = \dot{v}_O = a_O = r\ddot{\theta} = r\alpha \ , \ a_O = r\alpha$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 3/17

เนื้อหา

โดย θ จะมีหน่วยเป็น Radian และในกรณีที่ล้อกลิ้งช้าลง ความเร่ง a_O จะมีทิศตรงกันข้าม v_O และความเร่งเชิงมุม α จะมีทิศตรงกันข้ามกับ ω

เมื่อจุดที่ขอบล้อ C เคลื่อนที่มายัง C' จะได้ระยะตามแนวแกน x และ y ดังนี้

$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$$

$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta) = v_O(1-\cos\theta) \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = v_O\sin\theta$$

$$\ddot{x} = \dot{v}_O(1-\cos\theta) + v_O\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{y} = \dot{v}_O\sin\theta + v_O\dot{\theta}\cos\theta$$

$$= a_O(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta \qquad = a_O\sin\theta + r\omega^2\cos\theta$$

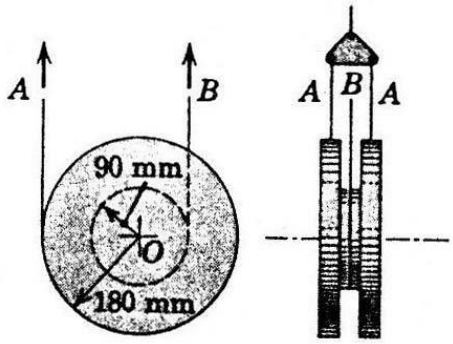
ในตำแหน่งที่จุด C สัมผัสพื้น , $\theta = 0$ ดังนั้น $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = r\omega^2$ **ตอบ**

นั่นคือขณะที่จุด C สัมผัสพื้นจะมีความเร่งขึ้นอยู่กับค่า r และ ω และมีทิศทางเข้าหาจุดศูนย์กลาง O ของล้อ ความเร็วและความเร่งของจุด C ที่ตำแหน่ง θ ใดๆ คือ $\vec{v} = i\dot{x} + j\dot{y}$ และ $\vec{a} = i\ddot{x} + j\ddot{y}$ ตามลำดับ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 4/17

เนื้อหา

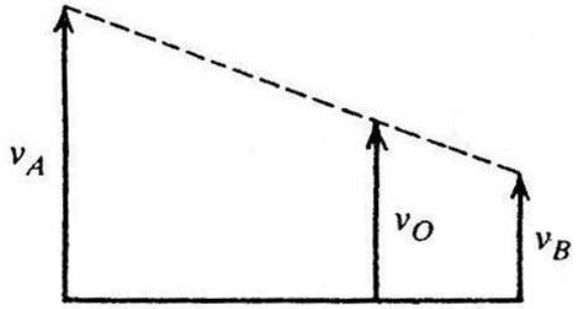
ตัวอย่างที่ 2 สายเคเบิลพันรอบรอก 2 ชั้นตามรูป ถ้ากำหนดให้ความเร็วของสายเคเบิลที่ A และ B เท่ากับ 4 m/s และ 3 m/s ทิศทางขึ้นด้านบน ตามลำดับ จงหาความเร็วของจุดศูนย์กลาง O และความเร็วเชิงมุมของรอก



หลักการวิเคราะห์

เนื่องจากความเร็วของสายเคเบิลก็คือ ความเร็วของจุดบนขอบของรอก ดังนั้นเมื่อเขียนผังความเร็วของจุดบนรอกก็จะหาความเร็วของจุดศูนย์กลาง O และความเร็วเชิงมุมของรอกได้

การคำนวณ



ตามผังความเร็วของจุดบนรอก

$$\omega = \frac{v_A - v_B}{AB}$$

$$= \frac{4-3}{0.27}$$

$$= 3.70 \text{ rad/s ตามเข็มนาฬิกา}$$

$$v_O = v_B + \overline{OB}\omega$$

$$= 3 + 0.090(3.07)$$

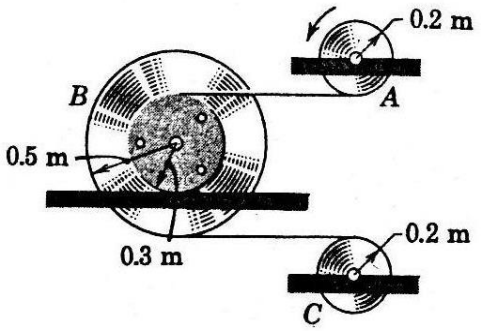
$$= 3 + 0.33$$

$$= 3.33 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 5/17

เนื้อหา

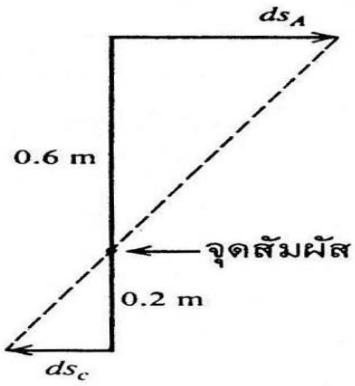
ตัวอย่างที่ 3 สายเคเบิลจากรอก A ทำให้ดุมของล้อกลิ้งไปโดยไม่มีการลื่นไถล จงหาความเร็วเชิงมุม ω และความเร่งเชิงมุม α ของรอก C ในขณะที่ความเร็วเชิงมุมและความเร่งเชิงมุมของ รอก A เท่ากับ 4 rad/s และ 3 rad/s^2 ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาตามลำดับ



หลักการวิเคราะห์

เขียนผังการขจัดของล้อ B ในช่วงเวลา dt ซึ่งล้อมีการกลิ้งไปโดยไม่มีการลื่นไถลที่จุดสัมผัสของดุมล้อกับผิวของรางก็จะมีความเร็วเป็นศูนย์

การคำนวณ



จากผังการขจัดของล้อ B จะได้

$$ds_A = \frac{0.6}{0.2} ds_C = 3\, ds_C$$

ซึ่ง $$v_C = \frac{1}{3} v_A$$

$$\omega_C = \frac{1}{3} \omega_A$$

และเมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลาของสมการข้างต้นก็จะได้

$$\alpha_c = \frac{1}{3} \alpha_A$$

ดังนั้น $$\omega_C = \frac{4}{3} \text{ rad/s}$$

และ $$\alpha_c = \frac{3}{3} = 1 \text{ rad/s}^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 6/17

เนื้อหา

2. การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์

2.1) การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบแกนอ้างอิงเคลื่อนที่ขนานกับแนวเดิม

ความเร็วสัมพัทธ์ (Relative Velocity)

ในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของอนุภาค สำหรับการเคลื่อนที่ซึ่งวัดเทียบกับแกนอ้างอิงเคลื่อนที่ขนานกับแนวเดิม เราได้สมการของความเร็วสัมพัทธ์ คือ

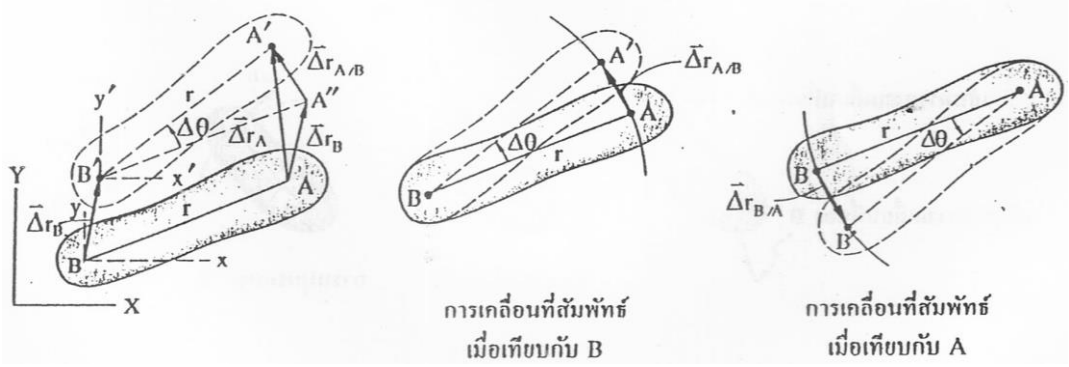
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

โดย A และ B คือ อนุภาคสองอนุภาคที่มีการเคลื่อนที่ ในการที่จะนำสมการนี้มาใช้กับการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง เราจะเลือกจุดสองจุด บนวัตถุเกร็ง เป็นตำแหน่งอนุภาค A และ B การเคลื่อนที่ของจุดหนึ่งเมื่อสังเกตโดยผู้ที่สังเกตการเคลื่อนที่ขนานกับแนวเดิมไปพร้อมกับอีกจุดหนึ่งจะเป็นวงกลม ทั้งนี้เพราะระยะระหว่างจุดทั้งสองบนวัตถุเกร็งจะมีค่าคงที่เสมอ

รูปที่ 5.8 (ก) เรากำหนดให้แกน x - y เคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด B วัตถุเกร็งจะเคลื่อนที่ในระนาบจากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A′B′ ในช่วงเวลา Δt การเคลื่อนที่นี้อาจแบ่งออกได้เป็นสองช่วง คือ

ช่วงแรก : วัตถุเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหล (Translation) จากตำแหน่ง AB ไปยังตำแหน่ง A″B′ด้วยการขจัด $\Delta \vec{r}_B$

ช่วงหลัง : วัตถุเคลื่อนที่ด้วยการหมุนรอบจุดหมุน B′ ไปเป็นมุม $\Delta\theta$ จากตำแหน่ง A″B′ ไปยังตำแหน่ง A′B′



(ก) (ข) (ค)

รูปที่ 5.8 ลักษณะการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ของวัตถุเกร็งแบบแกนอ้างอิงขนานกับแนวเดิม

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 7/17

เนื้อหา

ในการเคลื่อนที่ช่วงหลัง หากเราพิจารณาในแกน $x'-y'$ วัตถุจะมีการเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่ (Fixed-axis Rotation) รอบจุด B ด้วยการขจัดของจุด A เท่ากับ $\Delta r_{A/B}$ ดังรูปที่ 5.8 (ข)

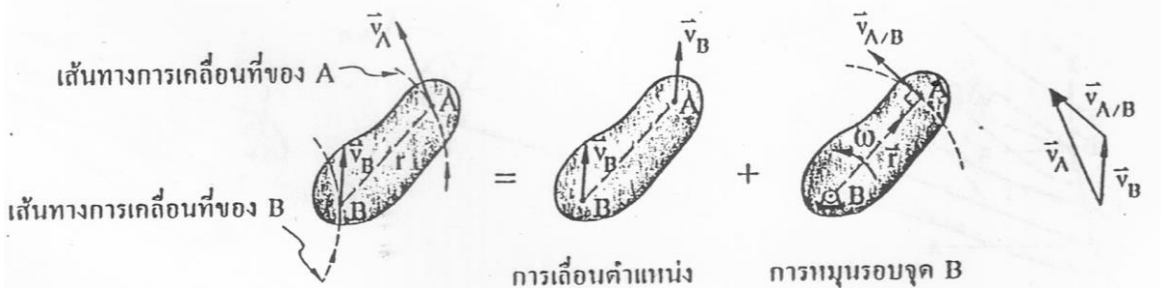
การเคลื่อนที่ของวัตถุทั้งสองช่วงที่กล่าวข้างต้น เราได้กำหนดให้แกน $x-y$ เคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด B แต่ในกรณีที่เรากำหนดให้แกน $x-y$ เคลื่อนที่ไปพร้อมกับจุด A การเคลื่อนที่ของวัตถุแรกจะเป็นแบบเลื่อนไหลด้วยการขจัด $\Delta \vec{r}_A$ และในช่วงหลังวัตถุจะหมุนรอบจุด B เท่ากับ $\Delta \vec{r}_{A/B}$ ดังรูป 5.8 (ค) ซึ่งจะเห็นได้ว่า $\Delta \vec{r}_{B/A} = -\Delta \vec{r}_{A/B}$

เมื่อกำหนดแกน $x-y$ อยู่ที่ B การขจัดทั้งหมดของ A คือ

$$\Delta \vec{r}_A = \Delta \vec{r}_B + \Delta \vec{r}_{A/B}$$

นั่นคือ $\Delta \vec{r}_{A/B}$ จะมีขนาดเท่ากับ $r\Delta\theta$ เมื่อ $\Delta\theta$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์
จะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่สัมพัทธ์เชิงเส้น (Relative Linear Motion) $\Delta \vec{r}_{A/B}$ (จาก A'' ไปยัง A') จะประกอบด้วยส่วนของการเคลื่อนที่สัมบูรณ์ (Absolute Angular Motion) $\Delta\theta$
เมื่อหารด้วยช่วงเวลา Δt ซึ่งมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ จะได้ว่า

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B} \qquad ...(5.1)$$



รูปที่ 5.9 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 8/17

เนื้อหา

การเคลื่อนที่ของวัตถุ ซึ่งแยกออกได้เป็น 2 ช่วง จะมีความเร็วในแต่ละช่วง ดังแสดงในรูปที่ 5.9 กล่าวคือความเร็วสัมบูรณ์ที่จุด A คือ ผลบวกของเวกเตอร์ของการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหล (Translation) $\vec{v}_B$ และส่วนของการเคลื่อนที่แบบหมุน (Rotation) $\vec{v}_{A/B} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ โดย $v_{A/B} = r\omega$ เมื่อ $\omega = \dot{\theta}$ เป็นความเร็วเชิงมุมสัมบูรณ์ของ A B

ข้อสังเกต :

ความเร็วสัมพัทธ์เชิงเส้น (Relative Linear Velocity) $\vec{v}_{A/B}$ จะมีทิศทางในแนวตั้งฉากกับ $\vec{r}$ เสมอ และ $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{AB}$ ก็คือ ความเร็วเชิงมุมของวัตถุเกร็ง

ความเร่งสัมพัทธ์ (Relative Acceleration)

จากสมการ

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{A/B}$$

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t จะได้ว่า

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + \vec{a}_{A/B} \qquad ...(5.2)$$

นั่นคือ ความเร่งของจุด A จะเท่ากับผลบวกทางเวกเตอร์ของความเร่งของจุด B และความเร่งของจุด A เมื่อสังเกตจากผู้สังเกตที่เคลื่อนที่ขนานกับแนวเดิมไปพร้อมกับจุด B

เนื่องจากการเคลื่อนที่ในช่วงหลัง จุด A เคลื่อนที่เป็นวงกลมรอบจุด B ดังนั้นสมการ (5.2) จึงเขียนได้เป็น

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t \qquad ...(5.3)$$

โดยที่ $(a_{A/B})_n = \dfrac{v_{A/B}^2}{r} = r\omega^2$ มีทิศทางพุ่งเข้าหาจุด B

$(a_{A/B})_t = \dot{v}_{A/B} = r\alpha$ ในแนวตั้งฉากกับ r และมีทิศทางสัมพันธ์กับ α

หรือ $(\vec{a}_{A/B})_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$, $(\vec{a}_{A/B})_t = \vec{\alpha} \times \vec{r}$

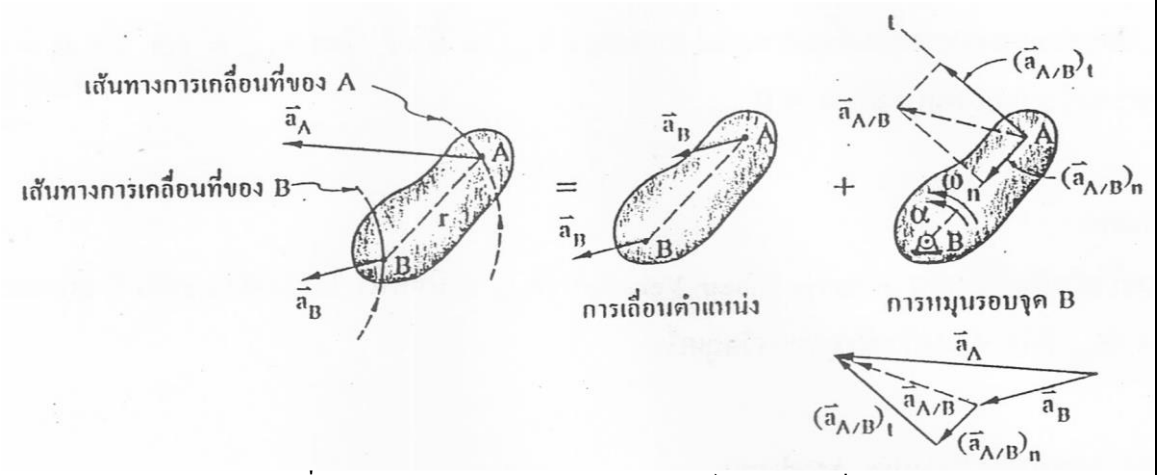
เมื่อ

$\vec{\alpha}$ คือ ความเร่งเชิงมุมสัมบูรณ์ของวัตถุเกร็ง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 9/17

เนื้อหา

การเคลื่อนที่ของวัตถุซึ่งแยกเป็นสองช่วง จะมีความเร่งในแต่ละช่วงดังแสดงในรูปที่ 5.10

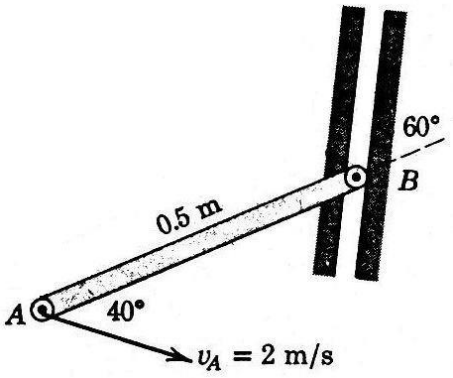


รูปที่ 5.10 การพิจารณาความเร่งสัมพัทธ์ของวัตถุเกร็ง

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 10/17

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4 ปลาย A ของแขน AB มีความเร็วตามที่แสดงไว้ในรูป ส่วนปลาย B ถูกบังคับให้เคลื่อนที่ในร่อง ที่ตำแหน่งตามรูป จงหาความเร็วของ B และความเร็วเชิงมุมของแขน AB



หลักการวิเคราะห์

ใช้สมการความเร็วสัมพัทธ์ โดยทั่วไปจะเขียนสมการของความเร็วของจุดที่จะหาความเร็ว (จุด B) เทียบกับจุดที่รู้ความเร็วแล้ว (จุด A)

การคำนวณ

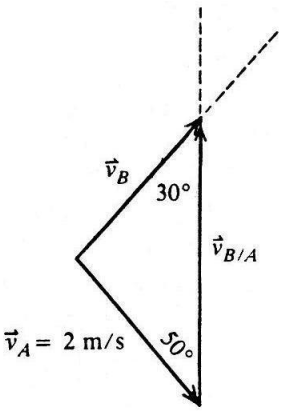
$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$$

โดยที่

$\vec{v}_B$ มีทิศทางในแนวของร่องทำมุม 60 องศา กับ AB

$\vec{v}_A$ มีทิศทางและขนาดตามรูป

$\vec{v}_{B/A}$ มีทิศทางตั้งฉากกับ AB



เขียนรูปเวกเตอร์ของความเร็วและใช้กฎของไซน์จะได้

$$\frac{v_B}{\sin 50^\circ} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

$$v_B = \frac{2\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ} = 3.06 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

$$v_{B/A} = v_B\cos 30^\circ + v_A\cos 50^\circ$$

$$= 3.06\cos 30^\circ + 2\cos 50^\circ$$ **ตอบ**

$$= 3.94 \text{ m/s}$$

$$\omega_{AB} = \frac{v_{B/A}}{AB} = \frac{3.94}{0.5}$$

$$= 7.88 \text{ rad/s}$$ ทวนเข็มนาฬิกา **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 11/17

เนื้อหา

2.2 การวิเคราะห์การเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบแกนอ้างอิงหมุน

การเคลื่อนที่ของอนุภาค A ซึ่งสังเกตการเคลื่อนที่จากอนุภาค B ซึ่งเคลื่อนที่ไปพร้อมกับแกนอ้างอิงเคลื่อนที่หมุน (Rotating Reference Axes) มีความสัมพันธ์ดังนี้

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{v}_{rel}$$

เมื่อ

$\vec{v}_A$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์ของอนุภาค A

$\vec{v}_B$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์ของอนุภาค B

$\vec{\omega}\times\vec{r}$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของจุด P เทียบกับจุด B

(P เป็นจุดบนระนาบของแกนเคลื่อนที่หมุนและอยู่ซ้อนกับ A)

$\vec{v}_{rel}$ คือ ความเร็วสัมพัทธ์ของ A เทียบกับ P

ดังนั้น

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{v}_{P/B} + \vec{v}_{A/P}$$

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_{A/P} \qquad ...(5.4)$$

ในทำนองเดียวกัน จากสมการความเร่งสัมพัทธ์

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + (2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{rel}$$

เมื่อ

$\vec{a}_A$ คือ ความเร่งสัมบูรณ์ของอนุภาค A

$\vec{a}_B$ คือ ความเร็วสัมบูรณ์ของอนุภาค B

$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ คือ ความเร่งสัมพัทธ์ของจุด P เทียบกับ B ในแนวสัมผัส $= (\vec{a}_{P/B})_t$

$\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{r}$ คือ ความเร่งสัมพัทธ์ของจุด P เทียบกับ B ในแนวตั้งฉาก $= (\vec{a}_{P/B})_n$

$\vec{a}_{rel}$ คือ ความเร่งสัมพัทธ์ของจุด A เทียบกับ P

ดังนั้น

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{P/B})_t + (\vec{a}_{P/B})_n + (2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{A/P}$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + (2\vec{\omega}\times\vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{A/P} \qquad ...(5.5)$$

ในการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบแกนอ้างอิงเคลื่อนที่หมุนของวัตถุเกร็งสองชิ้น เราจะกำหนดจุด A เป็นจุดบนวัตถุเกร็ง ส่วนจุด P และจุด B จะอยู่บนวัตถุเกร็งอีกชิ้นหนึ่ง โดยจุด A และ P จะซ้อนกันอยู่ สมการที่ใช้จะอยู่ในรูปของสมการ 5.4 และ 5.5

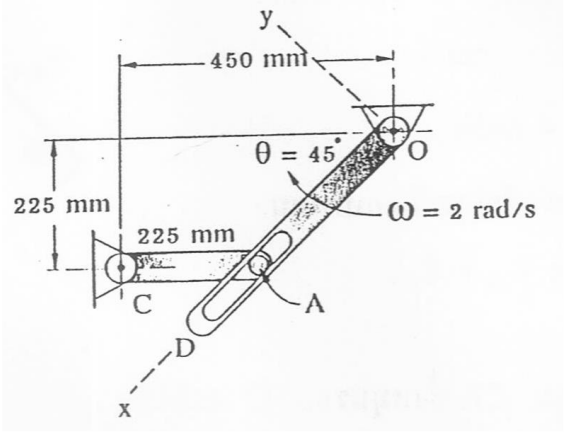
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 12/17

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 5 : หมุด A บนแขน CA เคลื่อนที่อยู่ในร่องของแขน OD ถ้าแขน OD หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 2$ rad/s ในทิศทางตามเข็มนาฬิกาและมีค่าคงที่ในช่วงหนึ่งของการเคลื่อนที่ ในตำแหน่ง $\theta = 45^{o}$ ซึ่งแขน CA อยู่ในแนวระดับ จงหา

A) ความเร็วของหมุด A ความเร็วเชิงมุมของแขน CA และความเร็วสัมพัทธ์ของหมุด A เทียบกับร่อง

B) ความเร่งของหมุด A ความเร่งเชิงมุมของแขน CA และความเร่งสัมพัทธ์ของหมุด A เทียบกับร่อง



วิธีทำ

พิจารณาระบบวัตถุเกร็งซึ่งประกอบด้วยวัตถุเกร็ง 2 ชิ้น คือ

แขน CA มีการหมุนรอบจุด C

แขน OD มีการหมุนรอบจุด O

หมุด A บนวัตถุเกร็ง CA เคลื่อนที่อยู่ในร่องของแขน OD (เส้นทางการเคลื่อนที่ของหมุด A) ซึ่งหมุนไป ดังนั้นจะวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์เทียบกับแกนอ้างอิงหมุน โดยกำหนดแกนอ้างอิง x - y ตามที่รูปกำหนดในรูป หมุนไปพร้อมกับแขน OD และกำหนดจุด P เป็นจุดบนแขน OD (ติดกับเส้นทางการเคลื่อนที่) และทับกับจุด A

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 13/17

เนื้อหา

A) จากสมการความเร็วสัมพัทธ์เทียบกับแกนหมุน :

$$\bar{v}_A = \bar{v}_P + \bar{v}_{A/P}$$

$v_A = \overline{CA}\,\omega_{CA}$ ทิศทางตั้งฉากกับแขน CA

$v_P = \overline{OP}\,\omega_{OP} = (\frac{225\sqrt{2}}{2}) = 250\sqrt{2}$ mm/s

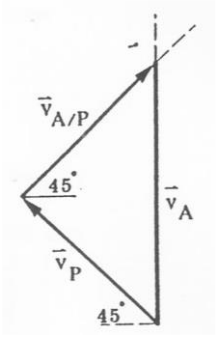
ทิศทางตั้งฉากกับแขน OP ไปในทาง ω_{OP}

เขียนผังเวกเตอร์ ซึ่งจากผังดังกล่าวจะได้

$v_A = 450\sqrt{2}\,(\sqrt{2}) = 900$ mm/s

$v_{A/P} = 450\sqrt{2}$ mm/s

$\omega_{CA} = \frac{900}{225} = 4$ rad/s



B) จากสมการความเร่งสัมพัทธ์เทียบกับแกนหมุน :

$$\vec{a}_A = \vec{a}_P + 2\omega \times \vec{v}_{rel} + \vec{a}_{A/P}$$

หมุด A เป็นจุดที่อยู่บนแขน CA ซึ่งหมุนรอบ C จะได้ว่า

$$\vec{a}_A = (\vec{a}_A)_n + (\vec{a}_A)_t$$

$(\vec{a}_A)_n = \overline{CA}\,\omega_{CA}^2 = 225(4)^2 = 3{,}600$ mm/s ทิศทางจากจุด $A \to C$

$(\vec{a}_A)_t = \overline{CA}\,\alpha_{CA}$ ทิศทางตั้งฉากกับ CA

จุด P เป็นจุดบนแขน OD ซึ่งหมุนรอบจุด O จะได้

$$\vec{a}_P = (\vec{a}_P)_t + (\vec{a}_P)_n$$

$(\vec{a}_P)_n = \overline{OP}\,\omega_{OP}^2 = 225\sqrt{2}\,(2)^2 = 900\sqrt{2}$ mm/s ทิศทางจากจุด $P \to O$

$(\vec{a}_A)_t = \overline{OP}\,\alpha_{OP} = 0$ เนื่องจาก $\omega_{OP} = \text{const.}$

$|2\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}| = 2\omega_{OP}\, v_{A/P} = 2(2)(450\sqrt{2})$

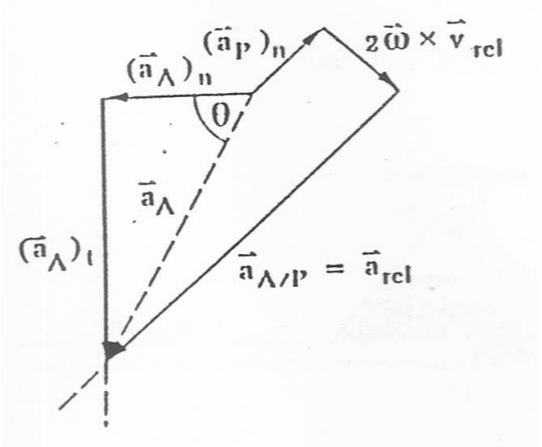
$= 1{,}800\sqrt{2}$ mm/s^2 ทิศทางตั้งฉากกับ $\vec{v}_{rel}$ หรือ $\vec{v}_{A/P}$ ในทาง ω_{OP}

$a_{A/P} = \ddot{x}$ ทิศทางในแนวร่อง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 14/17

เนื้อหา

เขียนผังความเร่งและจากผังดังกล่าว จะได้



$(\vec{a}_A)_t = 7{,}200 \text{ mm/s}^2$

$\vec{a}_{A/P} = 8{,}910 \text{ mm/s}^2$

$\alpha_{CA} = \dfrac{7{,}200}{225} = 32 \text{ rad/s}^2$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

$a_A = \sqrt{(7{,}200)^2 + (3{,}600)^2} = 8{,}050 \text{ mm/s}^2$

และทำมุม $\theta = \tan^{-1}\dfrac{7{,}200}{3{,}600} = 63.4^o$ กับแนวระดับ **ตอบ**

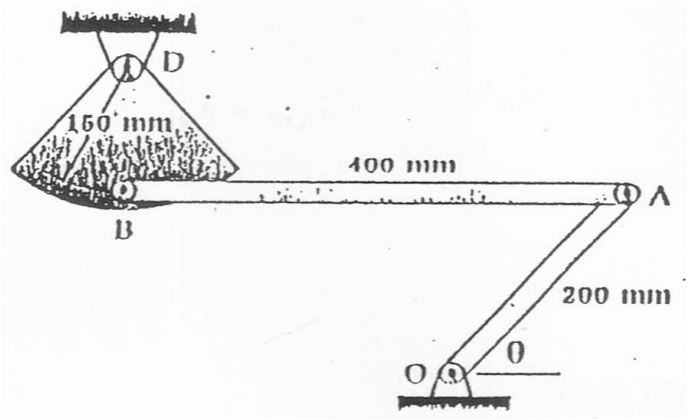
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 15/17

เนื้อหา

ข้อที่ 1 : ถ้าแขน OA มีความเร็วเชิงมุมคงที่เท่ากับ 4 rad/s ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ในตำแหน่ง เมื่อ $\theta = 45^{o}$ ซึ่งแขน AB อยู่ในแนวระดับและแนว BD อยู่ในแนวดิ่ง จงหาความเร่งเชิงมุมของจาน DB **ตอบ.** $\omega_{DB} = \frac{0.566}{0.15} = 3.77$ rad/s (CCW),

$\omega_{AB} = \frac{0.566}{0.4} = 1.415$ rad/s (CCW)

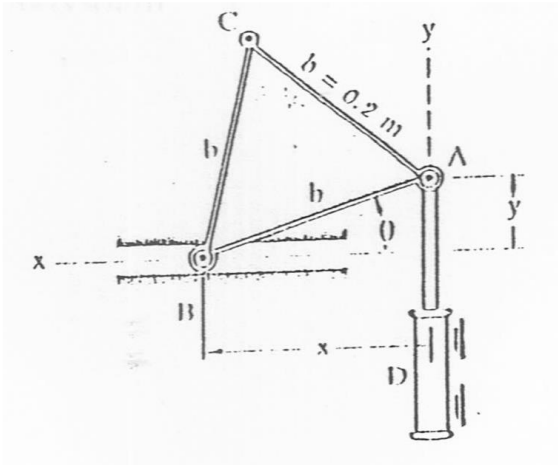
, $\alpha_{DB} = \frac{0.463}{0.15} = 9.75$ rad/s^2 (CCW)



ข้อที่ 2 : การเคลื่อนที่ของแผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ถูกควบคุมโดยกระบอกสูบไฮดรอลิกส์ D ถ้าก้านสูบในกระบอกเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่เท่ากับ 0.3 m/s จงหาความเร็วและความเร่งของจุดศูนย์กลางของลูกกลิ้ง B ในร่องแนวระดับ และความเร็วและความเร่งเชิงมุมของขอบ CB เมื่อ

$\theta = 30^{o}$

ตอบ. $\alpha = 1.732$ rad/s^2

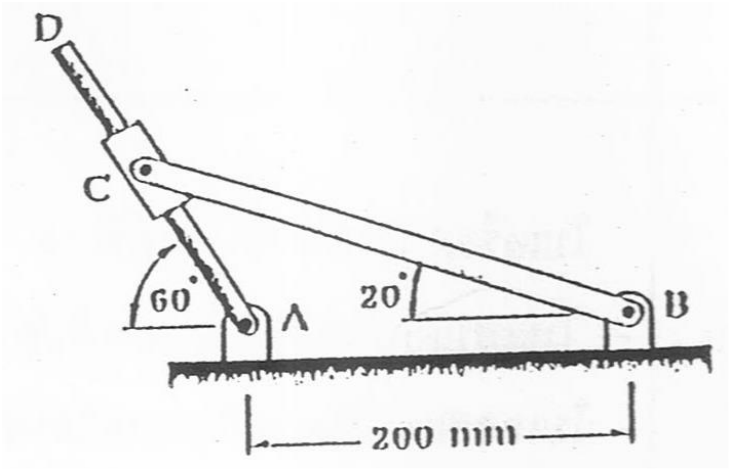


ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 16/17

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : แขน AD และแขน BC ต่อโยงกันด้วยปลอกเลื่อน C ถ้าความเร็วสัมพัทธ์ของปลอกเลื่อนเมื่อเทียบกับแขน AD เท่ากับ 225 mm/s ในทิศทางพุ่งออกจากจุด A และมีค่าคงที่ จงหาความเร็วเชิงมุมของแขนทั้งสอง

ตอบ. $\omega_{AD} = \frac{268.1}{106.4} = 2.52$ rad/s (CW), $\omega_{BC} = \frac{350}{269.5} = 1.30$ rad/s (CW)



<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 164-185
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 312-315,336-341</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 14
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 14
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 14</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 15	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 6 จลนพลศาสตร์ของวัตถุเกร็ง	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 1/25

ชื่อบทเรียน

6.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล

6.2 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

จุดประสงค์การสอน

6.1 เข้าใจหลักการโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลได้ถูกต้อง

6.1.1 อธิบายสมการของโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล

6.1.2 อธิบายความหมายของรัศมีไจเรชั่น

6.1.3 คำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล

6.2 เข้าใจสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง

6.2.1 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นตรง

6.2.2 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง

6.2.3 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบการหมุนรอบแกนคงที่

6.2.4 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบเคลื่อนที่ทั่วไปในระนาบ

6.2.5 อธิบายสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งที่มีการเคลื่อนที่แบบหมุน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 2/25

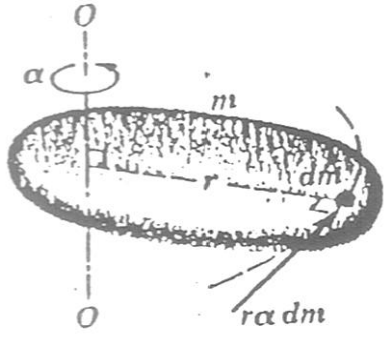
เนื้อหา

จลนศาสตร์ของวัตถุเกร็งในระนาบ

จนศาสตร์ของวัตถุเกร็งจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างแรงภายนอกซึ่งกระทำต่อวัตถุและการเคลื่อนที่ของวัตถุ อันเป็นผลต่อเนื่องทั้งในการเคลื่อนที่แบบ Translation และ Rotation โดยเราจะได้นำสมการคิเนเมติกส์ของวัตถุเกร็งที่ได้กล่าวมาแล้วในหน่วยการเรียนที่ 5 มาใช้ในหน่วยการเรียนนี้ ในหน่วยการเรียนที่ 3 เราได้กล่าวถึงการเคลื่อนที่ในระนาบของอนุภาค และการคำนวณโดยใช้สมการการเคลื่อนที่ในแนวย่อยสองสมการ สำหรับการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ ในหน่วยการเรียนนี้เราจำเป็นต้องมีสมการของโมเมนต์เพิ่มขึ้นมาอีกสมการหนึ่ง เพื่อกำหนดสภาวะการหมุนของวัตถุเกร็ง หลักการพื้นฐานของการคำนวณเกี่ยวกับจลนศาสตร์ คือ การแยกเอาระบบหรือวัตถุออกมาเขียนแผนภาพ (Diagram) เช่น เมื่อต้องการหาความสัมพันธ์ของแรง มวล ความเร่งหรือโมเมนตัม ณ. ขณะใด ๆ โดยใช้สมการการเคลื่อนที่ในการคำนวณ เราก็จะแยกออกมาเขียน Free Body Diagram (FBD) ซึ่งแสดงแรงทั้งหมดที่กระทำต่อระบบหรือวัตถุแยกออกมาเขียนแผนภาพ หรือ เมื่อใช้หลักการของงานและพลังงานในการคำนวณ ก็แยกออกมาเขียน Active Force Diagram ซึ่งแสดงแรงภายนอกทั้งหมดที่ทำให้เกิดงานบนระบบหรือวัตถุนั้น การแยกออกมาเขียนแผนภาพนี้ จะช่วยให้เกิดงานบนระบบหรือวัตถุนั้น การแยกอกมาเขียนแผนภาพนี้จะช่วยให้การคำนวณง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น

6.1 โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล (Mass Moment of Inertia)

สมการโมเมนต์รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง จะประกอบไปด้วยเทอมอินทิกรอล (Integral) ซึ่งมีค่าขึ้นอยู่กับการแผ่กระจายของมวลรอบแกนหมุนนั้น โดยเทอมอินทิกรอลนี้จะเกิดขึ้นก็ต่อเมื่อวัตถุเกร็งนั้นมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งเชิงมุม ดังนั้นในหัวข้อนี้เราจะศึกษาถึงเทอมอินทิกรอลสำหรับวัตถุเกร็งที่มีรูปทรงต่าง ๆ



รูปที่ 6.1 การเกิดโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 15 เลขหน้า 3/25

เนื้อหา

พิจารณาวัตถุเกร็งมวล m ดังรูปที่ 6.1 ซึ่งหมุนรอบแกน O-O ด้วยความเร่งเชิงมุม α ทุก ๆ อนุภาคของวัตถุ จะอยู่ในระนาบที่ขนานกันและต่างก็ตั้งฉากกับแกนหมุน O-O

พิจารณามวล dm ที่อยู่ในระนาบขนานระนาบหนึ่ง มวล dm จะมีความเร่งในแนวสัมผัสกับโค้งวงกลมของการเคลื่อนที่มีค่าเท่ากับ $r\alpha$ จากกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน จะได้ว่า แรงลัพธ์ในแนวสัมผัสที่กระทำต่ออนุภาคและทำให้เกิดความเร่ง $r\alpha$ ดังกล่าวคือ $r\alpha\, dm$ โมเมนต์รอบแกน O-O ของแรงนี้คือ $r^2\alpha\, dm$ ผลรวมของโมเมนต์ของแรงในลักษณะนี้ของทุกอนุภาคคือ

$$M_{O\text{-}O} = \int r^2\alpha\, dm$$

แต่เนื่องจากทุกเส้นรัศมี r มีความเร่งเชิงมุมเท่ากัน คือ

$$M_{O\text{-}O} = \alpha\int r^2 dm$$

เทอม $\int r^2 dm$ นี้คือ โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวล m รอบแกน O-O

$$I = \int r^2 dm \qquad ...(6.1)$$

โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงมวลจะมีส่วนเกี่ยวข้องกับการวิเคราะห์ความเร่ง และจะเป็นค่าแสดงคุณสมบัติของวัตถุ เช่นเดียวกับปริมาณมวล m กล่าวคือ มวล m จะเป็นค่าวัดถึงความสามารถในการต้านทานการเกิดความเร่งของการเคลื่อนที่เชิงเส้น (Translational Acceleration)

โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล อาจเขียนเป็นอีกลักษณะหนึ่งได้คือ

$$I = \sum m_i r_i^2$$

โดย

r_i คือ ระยะรัศมีจากแกนความเฉื่อยไปยังอนุภาคมวล m_i

ถ้าอนุภาคของมวล m มีความหนาแน่น ρ เท่ากันตลอดจะได้

$$I = \rho\int r^2 dV$$

โดย dV คือปริมาตรของมวล dm

หน่วยของโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลคูณกับระยะทางยกกำลังสอง ในระบบ SI คือ $kg.m^2$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 4/25

เนื้อหา

1. รัศมีไจเรชั่น (Radius of Gyration , k)

Radius of Gyration , k ของมวล m รอบแกนหนึ่ง ซึ่งมีค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกนนั้นเป็น I คือ

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

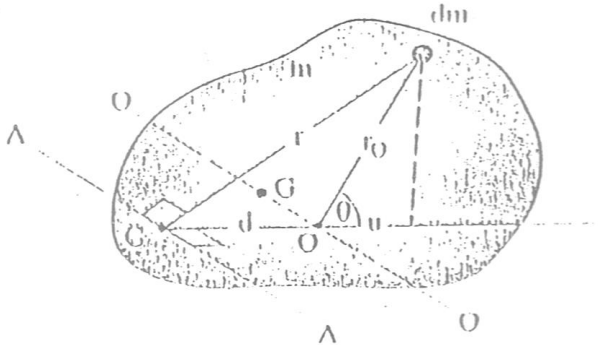
หรือ

$$I = k^2 m \qquad ...(6.2)$$

ค่า k นี้จะแสดงถึงการแผ่กระจายของมวลรอบแกนนั้น การกล่าวถึงโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกนใดแกนหนึ่ง มักจะกำหนดค่า m และ Radius of Gyration , k รอบแกนนั้นมาให้ ดังนั้น ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลจึงหาได้จากสมการที่ (6.2)

2. การย้ายแกนแบบขนาน (Transfer of Parallel axis)

ในกรณีที่เราทราบค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนซึ่งผ่านจุดศูนย์กลางของมวล (แกนนี้เรียกว่า Centroidal Axis) เราสามารถนำไปใช้หาโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุนี้รอบแกนอื่น ๆ ซึ่งขนานกับ Centrodial Axis ได้ดังนี้



รูปที่ 6.2 การย้ายแกนแบบขนาน

พิจารณามวล m มีแกน O - O เป็นแกนผ่านจุดศูนย์กลางของมวล G (Centroidal Axis) แกน A - A เป็นแกนใด ๆ ที่ขนานกับแกน O - O และอยู่ห่างจากแกน O - O เป็นระยะ d ระยะจากแกนทั้งสองไปยังมวล dm คือ r_o และ r ดังรูปที่ 6.2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 5/25

เนื้อหา

จาก Law of Cosine

$$r^2 = r_O^2 + d^2 + 2 r_O\, d \cos\theta$$

โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน A - A คือ

$$I = \int r^2 dm$$
$$I = \int (r_O^2 + d^2 + 2 r_O\, d \cos\theta) dm$$
$$I = \int r_O^2\, dm + d^2 \int dm + 2d \int u\, dm$$

เมื่อ

$u = r_O \cos\theta$

$\int r_O^2\, dm = \bar{I}$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล m รอบ Cetrodial Axis , O - O

$\int u\, dm = \bar{u}\, m = 0$ (เพราะว่า Coordinate u ของจุดศูนย์กลางมวล G บนแกน O - O คือ $\bar{u} = 0$)

ดังนั้น

$$I = \bar{I} + m d^2 \qquad ...(6.3)$$

เมื่อ

I คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล m รอบแกนใด ๆ ซึ่งขนานกัน Centroidal Axis และห่างจาก Centrodial Axis เป็นระยะ d

$\bar{I}$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวล m รอบแกน Centroidal Axis นั้น

ข้อสังเกต :

การย้ายแกนโดยใช้สมการที่ (6.3) นี้จะกระทำได้ระหว่างแกนสองแกนซึ่งขนานกันและเมื่อมีแกนหนึ่งเป็นแกนผ่านจุดศูนย์กลางมวลเท่านั้น

เมื่อแทนค่า $I = k^2 m$ ในสมการที่ (6.3) จะได้ว่า

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \qquad ...(6.4)$$

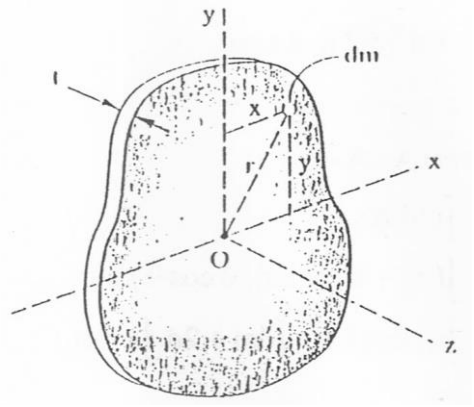
k คือ Radius of Gyration ของมวล m รอบแกนใด ๆ ซึ่งขนานกับ Centrodial axis และห่างจาก Centrodial axis เป็นระยะ d

$\bar{k}$ คือ Radius of Gyration ของมวล m รอบ Centrodial axis นั้น

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 6/25

เนื้อหา

3. โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นบาง (Moment of Inertia of Thin Plate)



รูปที่ 6.3 แผ่นบาง

พิจารณาแผ่นบางซึ่งมีความหนาสม่ำเสมอ t และมีความหนาแน่นมวลสม่ำเสมอ ρ โมเมนต์ความเฉื่อยของแผ่นบางรอบแกน z ซึ่งตั้งฉากกับแผ่นบาง คือ

$$I_{zz} = \int r^2\, dm = \rho t \int r^2\, dA$$

แต่

$$\int r^2\, dA = J_z$$

ดังนั้น

$$I_{zz} = \rho t\, J_z \qquad \ldots (6.5)$$

นั่นคือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน z (I_{zz}) มีค่าเท่ากับมวลต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ (ρt) คูณด้วยโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วของพื้นที่แผ่นบางรอบแกน z (J_z) ซึ่งตั้งฉากกับแผ่นบาง

ถ้าความหนา t มีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของแผ่นบาง เราจะได้ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน x และ y ซึ่งมีค่าเป็น

$$I_{xx} = \int y^2\, dm = \rho t \int y^2\, dA = \rho t\, I_x \qquad \ldots (6.6)$$

$$I_{yy} = \int x^2\, dm = \rho t \int x^2\, dA = \rho t\, I_y \qquad \ldots (6.7)$$

จากความสัมพันธ์ของโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ คือ $J_z = I_x + I_y$ ดังนั้น

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \qquad \ldots (6.8)$$

สมการที่ 6.8 นี้ จะใช้ได้ในกรณีที่เป็นแผ่นบางเท่านั้น และสามารถนำไปใช้กับแผ่นเรียบที่มี Differential Thickness หนาเท่ากับ d_z ในกรณีนี้สมการ 6.8 จะเขียนได้เป็น

$$dI_{zz} = dI_{xx} + dI_{yy} \qquad \ldots (6.9)$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 7/25

เนื้อหา

4. โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรูปทรงประกอบ(Mass Moment of Inertia of Composite Bodies)

การหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล ซึ่งประกอบด้วยรูปทรงต่าง ๆ รอบแกนใด ๆ จะเท่ากับผลรวมของโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละรูปทรงย่อยรอบแกนนั้น เนื่องจากโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลจะประกอบด้วยเทอมของระยะทางกำลังสอง ดังนั้นจึงมีค่าเป็นบวกเสมอ ในการพิจารณาโมเมนต์ความเฉื่อยของแต่ละรูปทรงย่อย เราจึงพิจารณาว่าส่วนใดเป็นปริมาตรบวกหรือลบ โดยส่วนที่เป็นปริมาตรบวก ค่าโมเมนต์ความเฉื่อยก็เป็นบวก และส่วนที่เป็นปริมาตรลบ เช่น ช่องว่าง รู ก็จะมีค่าเป็นลบ

ในการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล เราจะสามารถหาได้สองวิธีดังนี้

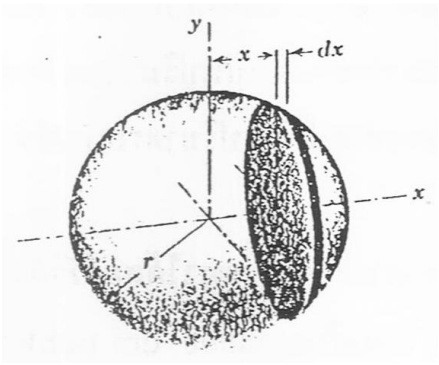
1. วิธีหาโดยตรง : เราจะแบ่งมวล m ออกเป็นมวลย่อย dm และหาระยะ r จากแกนความเฉื่อยไปยังมวลย่อย dm แล้วทำการอินทิเกรตหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล m ทั้งหมดรอบแกนความเฉื่อยนั้น ดังสมการที่ 6.1 คือ $I = \int r^2 dm$

2. วิธีย้ายแกน : ในกรณีที่เราต้องการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล m ซึ่งมีลักษณะรูปทรงมาตรฐาน เช่น รูปทรงสี่เหลี่ยม รูปทรงกรวย รอบแกนใด ๆ เราก็จะหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล m รอบแกนซึ่งขนานกับแกนที่ต้องการนั้น โดยอาศัยตารางค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรูปทรงมาตรฐาน แล้วจึงทำการย้ายแกนเพื่อหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อย ของมวลรอบแกนที่ต้องการนั้น โดยใช้สมการที่ (6.3) คือ $I = \bar{I} + m d^2$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 8/25

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยและ Radius of Gyration, k ของรูปทรงกระบอกตันเนื้อเดียว ซึ่งมีมวล m และรัศมี r รอบ Centrodial Axis , O-O



วิธีทำ

ให้ทรงกระบอกมีความหนาแน่น ρ และกำหนดส่วนย่อยของมวลดังรูป

$$dm = \rho\, dV = \rho\, t\, r_O\, dr_O\, d\theta$$

$$I_{O\text{-}O} = \int r_O^2\, dm = \rho\, t \int_0^{2\pi}\int_0^{r} r_O^3 dr_O d\theta$$

$$I_{O\text{-}O} = \rho\, t \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2}mr^2 \qquad \text{ตอบ}$$

และ Radius of Gyration

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \frac{r}{\sqrt{2}} \qquad \text{ตอบ}$$

ข้อสังเกต :

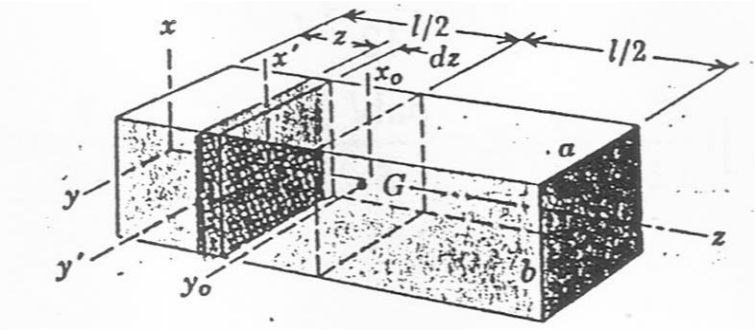
ในที่นี้มวล m เป็นรูปทรงมาตรฐาน (ทรงกระบอก) เราหาค่า I รอบแกน O-O โดยวิธีตรง คำตอบที่ได้จะมีค่าตรงกับที่อ่านได้จากตารางค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของรูปทรงมาตรฐาน คือ $I_{O\text{-}O} = \frac{1}{2}mr^2$ อีกประการหนึ่ง การกำหนดส่วนย่อยของมวล dm นี้จะต้องห่างจากแกนความเฉื่อย O-O เท่ากันหมด คือ r_O จึงจะใช้ได้

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 9/25

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 :

จงหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของแท่งสี่เหลี่ยมตันเนื้อเดียว มวล m รอบแกน x_O, z และ x



วิธีทำ :

ให้แท่งสี่เหลี่ยม มีความหนาแน่น ρ และกำหนดส่วนย่อยของมวลเป็นแผ่นสี่เหลี่ยมในระนาบตั้งฉากกับแกน z และมีความหนา dz ดังรูป

โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่รอบแกน x' และแกน y' ของส่วนย่อยของมวล จากตารางโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่มาตรฐาน มีค่าเท่ากับ

$$I_{x'} = \frac{1}{12} a^3 b \quad , \quad I_{y'} = \frac{1}{12} a\, b^3$$

ดังนั้น โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน x' และแกน y' ของส่วนย่อยของมวลจากสมการที่ 6.6 และ 6.7 จะมีค่าเป็น

$$dI_{x'x'} = \rho(dz)(\frac{1}{12} a^3 b) \quad , \quad dI_{y'y'} = \rho(dz)(\frac{1}{12} a\, b^3)$$

จากสมการที่ (6.8)

$$dI_{zz} = dI_{x'x'} + dI_{y''y'} = \rho\,(dz)\frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$$

$$I_{zz} = \int dI_{zz} = \rho \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)\int_0^l dz$$

$$I_{zz} = \int dI_{zz} = \rho \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)\int_0^l dz = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2) \qquad \text{ตอบ}$$

โมเมนต์ความเฉื่อยรอบแกน x_O หาได้โดยการเปรียบเทียบค่า I_{zz} จะได้

$$I_{x_O x_O} = \frac{1}{12} m\,(a^2 + l^2) \qquad \text{ตอบ}$$

$$[\, I = \bar{I} + md^2 \,] \Rightarrow I_{xx} = I_{x_O x_O} + m(\frac{l}{2})^2 = \frac{1}{12} m\,(a^2 + 4l^2) \qquad \text{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 10/25

เนื้อหา

I_{xx} อาจหาได้โดยการคิดจากโมเมนต์ความเฉื่อยของส่วนย่อยของมวล ซึ่งหนา dz รอบแกน x แล้วอินทิเกรตตลอดความยาว

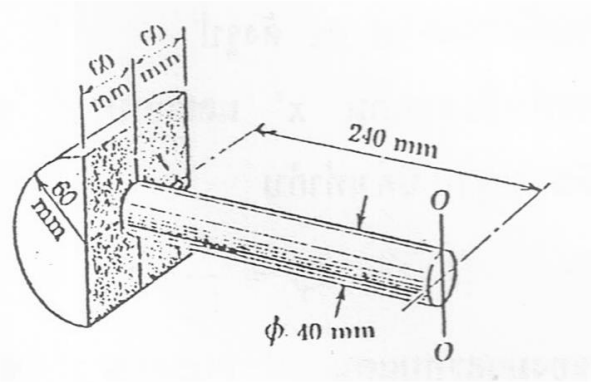
$$dI_{xx} = dI_{x'x'} + z^2\,dm = \rho\,(dz)\,(\frac{1}{12}a^2b) + z^2(\rho\ abcz)$$

$$= \rho\,ab\,(\frac{a^2}{12} + z^2)\ dz$$

$$I_{xx} = \rho\ ab \int_0^l (\frac{a^2}{12} + z^2)dz = \frac{\rho ab l}{3}(l^2 + \frac{a^2}{4}) = \frac{1}{12}m(a^2 + 4l^2) \qquad \text{ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 3 :

จงหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของไม้ตีคลีรอบแกน O-O มวลของไม้เท่ากับ 0.8 kg และมวลของด้ามเท่ากับ 0.5 kg



วิธีทำ :

พิจารณาส่วนหัวของไม้ จากตารางค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรูปครึ่งทรงกระบอก

$$\bar{r} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4(0.06)}{3\pi} = 0.025\ m$$

$$I_{yy} = \frac{1}{4}m r^2 + \frac{1}{12}m l^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{4}(0.8)(0.06)^2 + \frac{1}{12}(0.8)(0.120)^2$$

$$= 16.80 \times 10^{-4}\ \ kg.m^2$$

$$I_{y'y'} = I_{yy} - m\bar{r}^2$$

$$I_{y'y'} = 16.80 \times 10^{-4} - 0.8(0.0255)^2$$

$$I_{y'y'} = 11.61 \times 10^{-4}\ \ kg.m^2$$

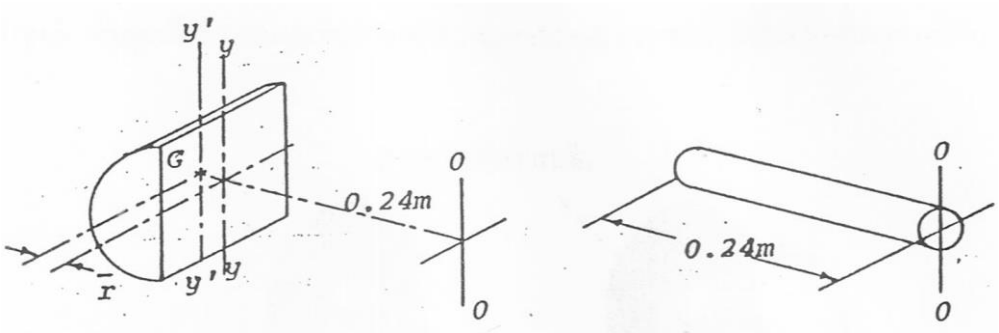
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 11/25

เนื้อหา

$$I_{OO} = I_{y'y'} + m d^2$$

$$I_{OO} = 11.61 \times 10^{-4} + 0.8(0.24 + 0.0255)^2$$

$$I_{OO} = 0.0575 \ kg.m^2$$



พิจารณาส่วนด้ามจับ จากตารางค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรูปทรงกระบอก

$$I_{OO} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$$

$$I_{OO} = \frac{1}{4}(0.5)(0.02)^2 + \frac{1}{3}(0.5)(0.24)^2$$

$$= 0.00965 \times 10^{-4} \ kg.m^2$$

ดังนั้น I_{OO} ของไมตีคลีเท่ากับ $0.0575 + 0.00965 = 0.06715 \ kg.m^2$ ตอบ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 12/25

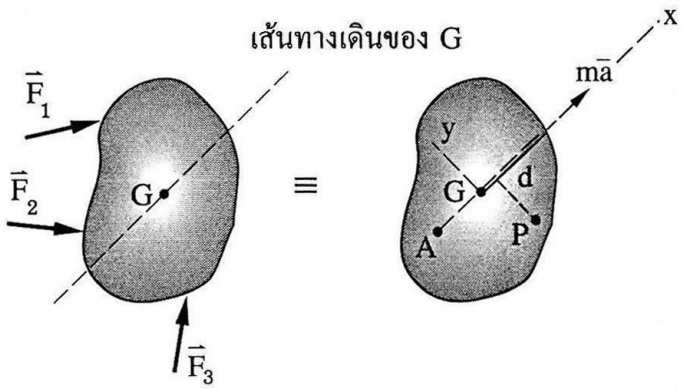
เนื้อหา

6.2 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

เมื่อวัตถุถูกแรงกระทำจะทำให้วัตถุนั้นมีการเคลื่อนที่ตามกฎการเคลื่อนที่ข้อที่ 2 ของนิวตัน

1) การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นตรง

วัตถุเคลื่อนที่มีการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง (Rectilinear) ความเร่งเชิงมุมจะเท่ากับศูนย์ ดังรูปที่ 6.4



รูปที่ 6.4 แสดงลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นตรง จะได้ชุดสมการเป็น

$$\sum F_x = m\bar{a}_x$$
$$\sum F_y = m\bar{a}_y$$
$$\sum M_G = 0$$
$$\sum M_P = m\bar{a}d$$

สำหรับสมการของโมเมนต์อาจเลือกใช้สมการโมเมนต์รอบจุดอื่น นอกจากจุด G คือ

$$\sum M_A = 0$$
$$\sum M_0 = m\bar{a}d$$

โดย

$\bar{a}$ คือ ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล G

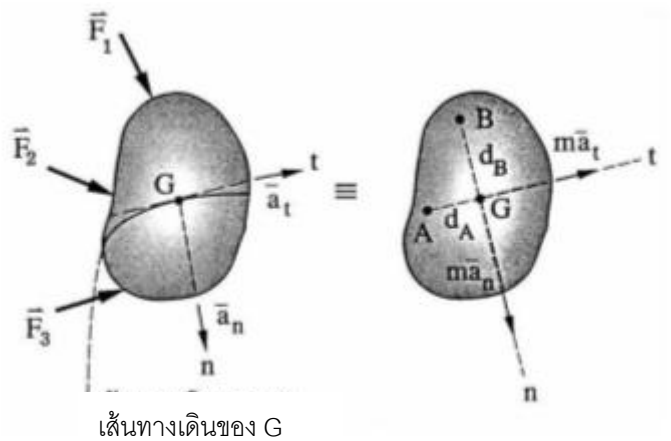
$\overline{M}$ คือ โมเมนต์รอบจุดศูนย์กลางมวล G

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 13/25

เนื้อหา

2) การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง

การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้งนิยมแยกแรงให้อยู่ในแนวตั้งฉากและแนวสัมผัส จะได้ชุดสมการเป็น



เส้นทางเดินของ G

รูปที่ 6.5 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง

การเคลื่อนที่แบบเลื่อนไหลในแนวเส้นโค้ง จะได้ชุดสมการเป็น

$$\sum F_n = m\bar{a}_n$$

$$\sum F_t = m\bar{a}_t$$

$$\sum \overline{M}_O = 0$$

สำหรับการของโมเมนต์อาจเลือกใช้สมการโมเมนต์รอบจุดอื่นนอกจากจุด G คือ

$$\sum M_A = m\bar{a}_n d_A$$

$$\sum M_B = m\bar{a}_n d_B$$

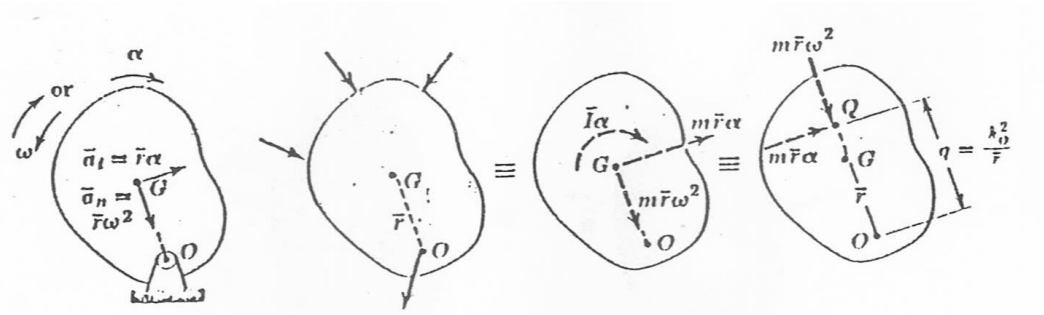
โดยจุด A อยู่ในแนว t และจุด B อยู่ในแนว n

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 14/25

เนื้อหา

3) การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่

การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่ จะได้ชุดสมการในกรณีที่จุดศูนย์กลางมวล (จุด G) ไม่ใช่จุดหมุน (ดูตามรูปที่ 6.6)



รูปที่ 6.6 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

การเคลื่อนที่แบบหมุนรอบแกนคงที่ จะได้ชุดสมการเป็น

$$\sum F_n = m\bar{r}\omega^2$$

$$\sum F_t = m\bar{r}\alpha$$

$$\sum M_O = I_0\alpha$$

โดย

I_0 คือโมเมนต์ความเฉื่อยของวัตถุรอบแกนผ่านจุด O ซึ่งเป็นจุดหมุน

$\bar{r}$ คือระยะจากจุด O ไปยังจุด G

สำหรับสมการของโมเมนต์รอบจุด G และ Q จะได้เป็น

$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha \quad , \quad \sum M_Q = 0$$

ซึ่งจุด Q คือ Center of Percussion มีระยะห่างจากจุดหมุนเท่ากับระยะ q โดย

$$q = \frac{k_O^2}{r}$$

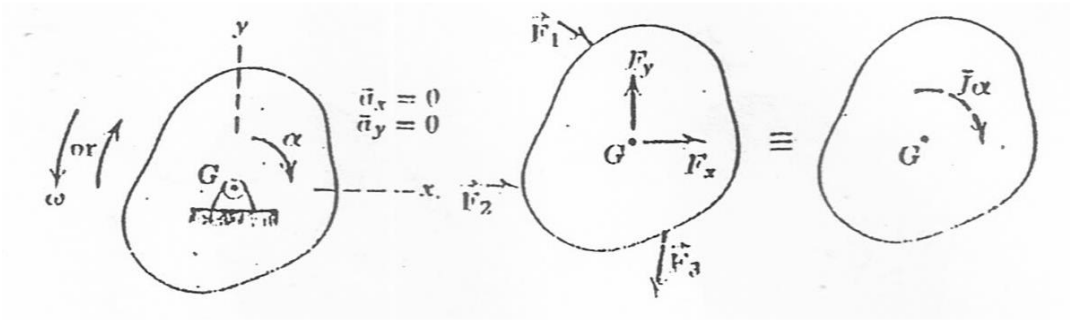
โดย

k_O คือรัศมีไจเรชั่นรอบจุด O

Q คือจุดศูนย์กลางเพอร์กัสชัน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 15/25

เนื้อหา



รูปที่ 6.7 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบหมุนรอบแกนคงที่

ในกรณีที่จุดหมุนเป็นจุดศูนย์กลางมวล G ตามรูปที่ 6.7 จะได้ชุดสมการเป็น

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

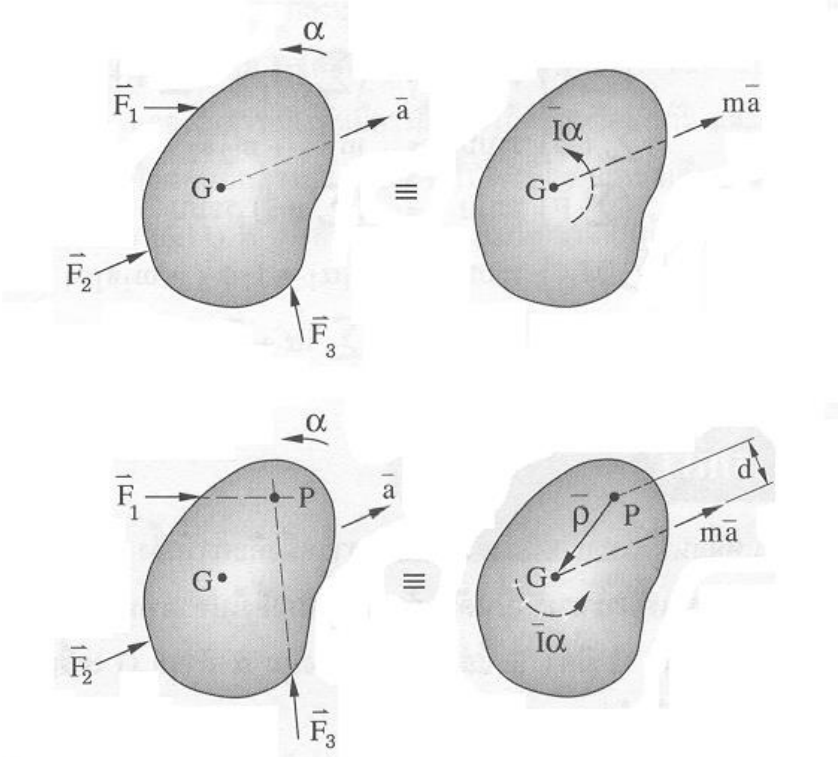
$$\sum \overline{M} = \bar{I}\alpha$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 16/25

เนื้อหา

4) การเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

วัตถุเคลื่อนที่ไปภายใต้การกระทำของแรงโดยที่ศูนย์กลางมวลจะมีความเร่งเชิงเส้นและความเร่งเชิงมุมพร้อมกันไป ผลลัพธ์ของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุจะไม่ผ่านจุดศูนย์กลางมวล



รูปที่ 6.8 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบทั่วไปในระนาบ

$$\sum F_x = m\bar{a}_x$$
$$\sum F_y = m\bar{a}_y$$
$$\sum \bar{M} = \bar{I}\alpha$$

สำหรับสมการของโมเมนต์รอบจุดอื่น เช่น จุด O จะได้เป็น

$$\sum M_0 = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d$$

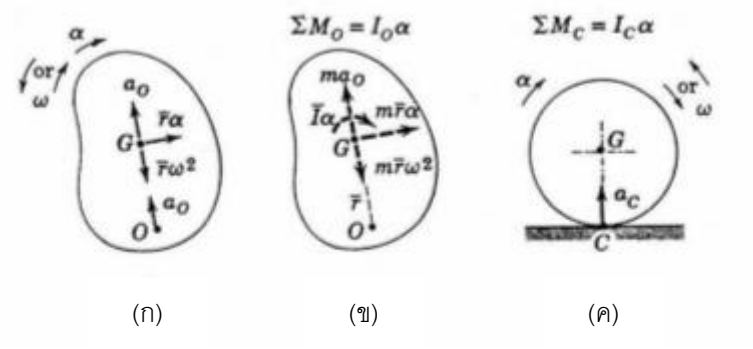
ในกรณีที่ moment center O ซึ่งอยู่บนวัตถุหรือส่วนต่อของวัตถุไม่มีความเร่ง สมการของโมเมนต์รอบจุด O คือ

$$\sum M_0 = I_0\alpha$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 17/25

เนื้อหา

และในกรณีที่ moment center O มีความเร่งเข้าสู่จุดศูนย์กลางมวล G ตามรูปที่ 6.9



รูปที่ 6.9 การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งแบบทั่วไปในระนาบ

จะได้สมการโมเมนต์รอบจุด O เป็น

$$\sum M_0 = I_0\alpha$$

ซึ่งก็จะใช้ได้สำหรับการกลิ้งโดยไม่มีการลื่นไถล จุด C จะเป็นจุดหมุนชั่วขณะที่มีความเร่งเข้าสู่จุด G ดังนั้น

$$\sum M_C = I_C\alpha$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 18/25

เนื้อหา

5) การกลิ้ง

การเคลื่อนที่ในระนาบที่สำคัญอีกอย่างหนึ่งคือ การกลิ้ง (Rolling Motion) ของวัตถุ เช่น การกลิ้งไปของจานกลมบนพื้นระนาบเป็นต้น ถ้าจานกลมกลิ้งไปตามพื้นโดยไม่มีการลื่นไถ ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวล G มีค่า $\bar{a}$ และความเร่งเชิงมุม α ถ้าจุด G เคลื่อนที่ไปได้เป็นระยะทาง $\bar{x}$ ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ $r\theta$ และเมื่อหาอนุพันธ์ค่า $\bar{x}$ สองครั้งจะได้สมการ

$$\bar{a} = r\alpha$$

ดังนั้นเราสามารถที่จะลดค่าตัวแปรในรูปของผลของระบบแรงได้ดังนี้

$$P - F = mr\alpha$$

และ

$$m_G = \bar{I}\alpha$$

$$m_C = mr\alpha + \bar{I}\alpha$$

เมื่อวัตถุกลิ้งไปโดยไม่มีการลื่นไถลจะไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กับระหว่างจุดบนวัตถุที่สัมผัสกับพื้นและพื้นที่วัตถุเคลื่อนที่ การวิเคราะห์สภาพการกลิ้งจะนำแรงเสียดทานที่ผิวสัมผัสมาพิจารณา วัตถุจะกลิ้งโดยไม่มีการลื่นไถลตราบที่แรงที่กระทำน้อยกว่าแรงเสียดทาน นั่นคือ

$$F < F_{max} \leq \mu_S N$$

และถ้าวัตถุกลิ้งพร้อมกับมีการลื่นไถลในเวลาเดียวกัน การเคลื่อนที่สัมพัทธ์จะเกิดขึ้นที่จุดสัมผัส แรงเสียดทานจะมีค่าเท่ากับ $F = \mu_k N$ ในกรณีนี้จุดศูนย์กลางมวล G ของวัตถุและการหมุนของวัตถุรอบจุด G จะเป็นอิสระต่อกัน $\bar{a}$ จะมีค่าไม่เท่ากับ $r\alpha$

ในการพิจารณาว่าวัตถุกลิ้งไปโดยไม่มีการลื่นไถลหรือไม่นั้น สิ่งแรกต้องสมมุติว่าการกลิ้งนั้นไม่มีการลื่นไถล ถ้าคำนวณหาแรงเสียดทาน F มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\mu_S N$ แสดงว่าการสมมุตินั้นถูกต้อง แต่ถ้า F มีค่ามากกว่า $\mu_S N$ แสดงว่าการกลิ้งนั้นมีการลื่นไถลเกิดขึ้นพร้อม ๆ กัน และต้องเริ่มคำนวณใหม่

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 19/25
เนื้อหา	

6) การวิเคราะห์ปัญหาการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ

การเคลื่อนที่ของวัตถุในระนาบนี้ตัวแปรพื้นฐานที่สัมพันธ์กันคือ แรง ความเร่งศูนย์กลางมวลเชิงเส้น และความเร่งเชิงมุมของวัตถุ ความสัมพันธ์นี้สามารถแสดงได้ด้วยภาพที่เรียกว่า ผังวัตถุอิสระและความสัมพันธ์ของมวลและความเร่ง สามารถแสดงเป็นภาพได้ด้วยแผนภาพที่เรียกว่า ผังลัพธ์ของระบบแรง ประโยชน์จากผลที่ได้รับจึงเหมือนกันทั้งในผังวัตถุอิสระและผังผลลัพธ์ระบบแรงจะช่วยในการวิเคราะห์ปัญหาได้ดี

$$\sum F_x \text{ ใน FBD} = \sum m\vec{a}_x \text{ ใน RFD}$$

$$\sum F_x = \sum (F_x)_{eff}$$

$$\sum F_y \text{ ใน FBD} = \sum m\vec{a}_x \text{ ใน RFD}$$

$$\sum F_y = \sum (F_y)_{eff}$$

$\sum M_o$ ที่เกิดจากแรง F ใน FBD = $\sum M_o$ ที่เกิดจาก ma ใน RFD + โมเมนต์ที่เกิดจากความเร่งเชิงมุม

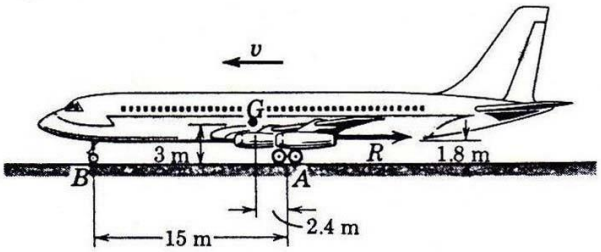
$$\sum M_o = \sum (M_o)_{eff}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 20/25

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1

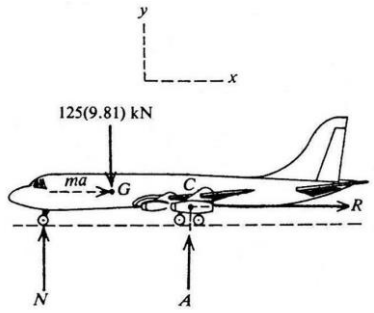
เครื่องบินไอพ่นลงจอดด้วยความเร็ว 200 km/h และลดความเร็วลงเหลือ 50 km/h ด้วยแรงผลักย้อน R ในระยะทาง 450 m ด้วยอัตราหน่วงคงที่ มวลรวมของเครื่องบินเท่ากับ 125 Mg และมีจุดศูนย์กลางมวลที่ G ตามรูป จงหาแรง N ที่กระทำที่ล้อด้านหน้าในขณะสิ้นสุดของการเบรกด้วยแรงผลักย้อน



หลักการวิเคราะห์

หาความหน่วงของเครื่องบิน แล้วเขียนผังวัตถุอิสระและผังแรงลัพธ์และใช้สมการการเคลื่อนที่ตามแบบของการเคลื่อนที่

การคำนวณ



F.B.D. และ R.F.D.

$$v^2 = v_0^2 + 2as$$

$$a = \frac{1}{2(450)}\left[(200^2 - 50^2)/(3.6)^2\right]$$

$$= 3.22 \ \text{m/s}^2$$

$$\sum M_C = mad$$

$$15N - 2.4\,(125)\,(9.81) = 125\,(3.22)(3\text{-}1.8)$$

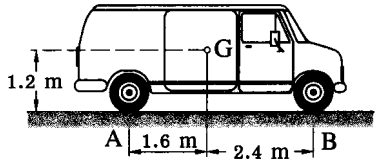
$$N = 228 \ \text{kN}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 21/25

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2

รถบรรทุกมวล 3000 กิโลกรัม วิ่งไปข้างหน้าด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที ทันใดนั้นคนขับเหยียบเบรกโดยกะทันหัน ทำให้รถเลื่อนไถลไปเป็นระยะ 7.5 เมตร จงหาขนาดของแรงปฏิกิริยาในแนวตั้งฉากกับล้อและแรงเสียดทานระหว่างล้อกับถนนในแต่ละล้อ



วิธีทำ

เราสามารถหาความหน่วงของรถในช่วงการเหยียบเบรกได้ดังนี้

จาก $\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}s$

ในที่นี้ $\bar{v}_0 = 10$ m/s

$\bar{v} = 0$

$s = 7.5$ m

ดังนั้น $\bar{a} = -\frac{10^2}{2(7.5)} = -6.67$ m/s^2

$[\sum F_y = \sum (F_y)_{eff}]$

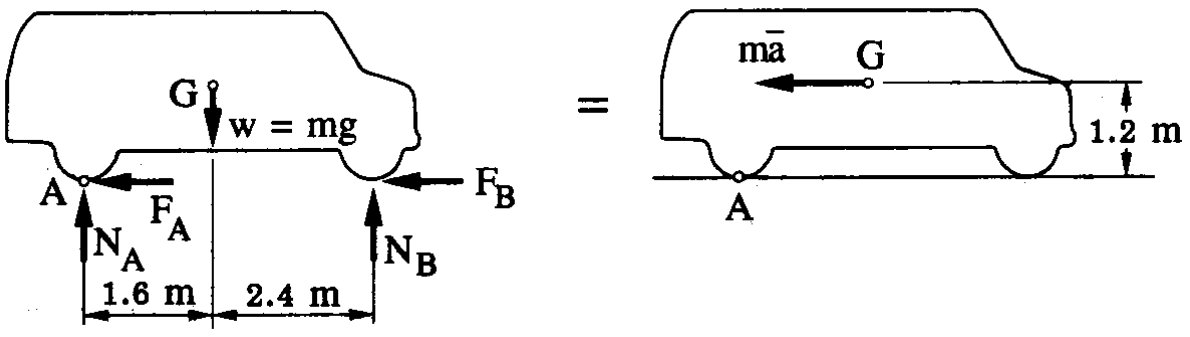
$N_A + N_B - W = 0$

เนื่องจาก $F_A = \mu N_A$

$F_B = \mu N_B$

$W = mg$

$F_A + F_B = \mu(N_A + N_B)\ \mu mg$



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 22/25

เนื้อหา

$[\sum F_x = \sum (F_x)_{eff}]$

$$-(F_A + F_B) = -m\bar{a}$$

$$-\mu mg = -m\bar{a}$$

ดังนั้น $$\mu = \frac{\bar{a}}{g} = \frac{6.67}{9.81} = 0.68$$

$[\sum M_A = \sum (M_A)_{eff}]$

$$-mg(1.6) + N_B(4) = ma(1.2)$$

$$-(3000)(9.81)(1.6) + N_B(4) = (3000)(6.67)(1.2)$$

$$N_B = 17.78 \text{ kN}$$

เนื่องจาก $$F_B = \mu N_B$$

$$F_B = (0.68)(17.78) = 12.09 \text{ kN}$$

$[\sum F_y = \sum (F_y)_{eff}]$

$$N_A + N_B - mg = 0$$

$$N_A + 17.78 + 3000(9.81) = 0$$

$$N_A = 11.65 \text{ kN}$$

เนื่องจาก $$F_A = \mu N_A$$

$$= (0.68)(11.65)$$

$$= 7.92 \text{ kN}$$

ดังนั้นแรงปฏิกิริยาและแรงเสียดทานในแต่ละล้อมีดังนี้

ล้อหน้า $$F = \frac{1}{2} F_B = 6.05 \text{ kN}$$

$$N = \frac{1}{2} N_B = 8.89 \text{ kN}$$

ล้อหลัง $$F = \frac{1}{2} F_B = 3.96 \text{ kN}$$

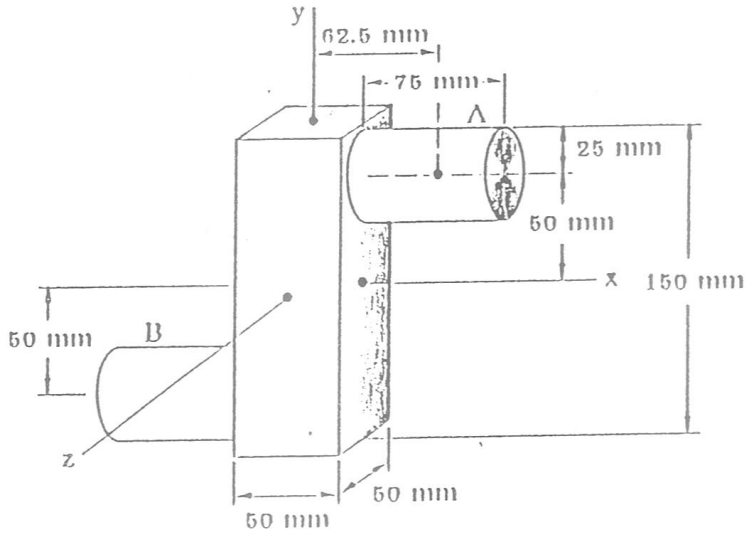
$$N = \frac{1}{2} N_B = 5.83 \text{ kN}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 23/25

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 เหล็กปั๊มขึ้นรูป มีรูปทรงประกอบด้วยแท่งปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมขนาด 150 x 50 x 50 mm. และแท่งทรงกระบอกเส้นผ่านศูนย์กลาง 50 mm. และยาว 75 mm. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน x , y และ z

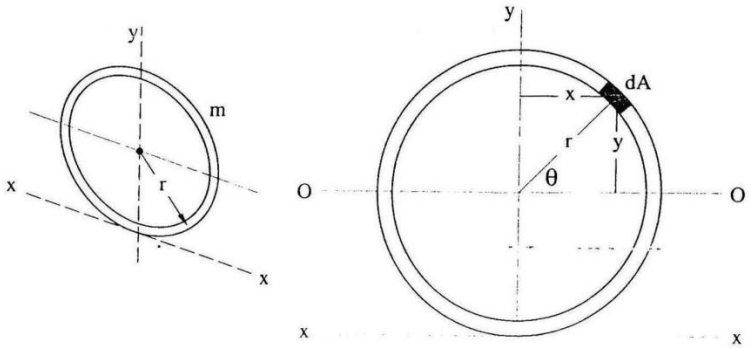
ตอบ. $I_x = 12.63 \times 10^{-3}\ kg.m^2$, $I_y = 11.71 \times 10^{-3}\ kg.m^2$, $I_z = 22.4 \times 10^{-3}\ kg.m^2$



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ข้อที่ 2 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของวงแหวนมวล m รัศมี r รอบแกน x –x

ตอบ. $\frac{3}{2}mr^2$



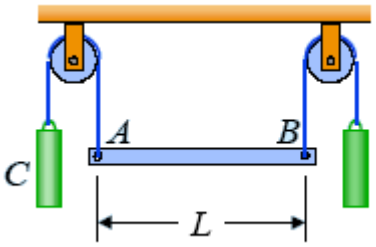
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 24/25

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 บาร์ AB มีน้ำหนัก W ถูกทำให้สมดุลโดยตุ้มน้ำหนัก 2 ก้อน ซึ่งแต่ละก้อนมีมวลเท่ากับ $\frac{1}{2}$W ถ้าสายเคเบิ้ล B ขาด จงหาความเร่งของจุด A และ ความเร่งของจุด B

ตอบ. $a_A = \frac{1}{3}g$, $a_B = \frac{5}{3}g\downarrow$



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 209-235
- เอกสารหมายเลข 5 หน้าที่ 159-166
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 345-356,363-368
- เอกสารหมายเลข 9 หน้าที่ 657-663</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 15
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 15
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 15</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 16	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 6 จลนพลศาสตร์ของวัตถุเกร็ง	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 1/14

ชื่อบทเรียน

6.3 งานและพลังงานของวัตถุเกร็ง

จุดประสงค์การสอน

6.3 เข้าใจหลักการของงานและพลังงานของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง

6.3.1 อธิบายสมการงานและพลังงานของวัตถุเกร็ง

6.3.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน

6.3.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของงานและพลังงาน

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 2/14

เนื้อหา

6.3 งานและพลังงานของวัตถุเกร็ง

การวิเคราะห์แรงและการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ โดยวิธีใช้ความสัมพันธ์ของงานและพลังงานนั้น จะใช้สมการของงานและพลังงาน คือ

$$U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e$$

งานที่เกิดขึ้นจากแรงที่กระทำต่อวัตถุ

งานที่เกิดขึ้นจากแรงภายนอก (F) ที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่ง S_1 ไป S_2 คือ

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot ds$$

หรือ

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F\cos\alpha) \cdot ds$$

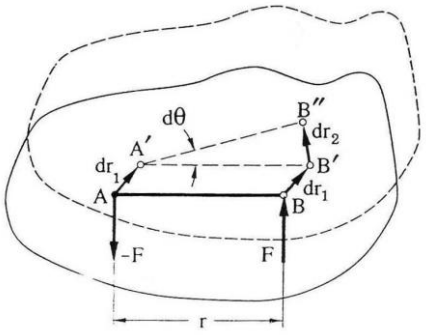
เมื่อ

F คือ แรง

ds คือ การขจัด

α คือ มุมที่เกิดขึ้นระหว่างแนวแรงและแนวการขจัด

งานที่เกิดขึ้นจากโมเมนต์



รูปที่ 6.10 การพิจารณางานที่เกิดจากโมเมนต์

พิจารณารูปที่ 1 แรง F และ – F แทนค่าโมเมนต์ M กระทำกับวัตถุทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปโดยจุด A เคลื่อนไปที่ A′และจุด B เคลื่อนที่ไปที่ B″ ลักษณะของการเคลื่อนที่แบ่งออกได้เป็น 2 ส่วน ส่วนแรกคือจุด A และจุด B เคลื่อนที่ไปด้วยการขจัด dr_1 ส่วนที่สอง จุด B′ จะเคลื่อนที่เชิงมุมรอบจุด A′ ได้การกระจัดเชิงเส้น $d\bar{r}_2$ และการขจัดเชิงมุม $d\theta$ ดังนั้นขนาดของการขจัด dr_2 หรือระยะทางจาก B ไป B″ คือ ds_2 จะเท่ากับ $rd\theta$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 3/14

เนื้อหา

งานที่ได้จากโมเมนต์คู่ควบ M ที่กระทำต่อวัตถุคือ

$$dU = M\,d\theta$$

เมื่อ $d\theta$ คือ มุมเล็กๆ ที่วัตถุเคลื่อนที่ไปมีหน่วยเป็นเรเดียน ดังนั้นถ้าต้องการงานที่กระทำให้วัตถุหมุนไปจากมุม θ_1 ไป θ_2 จะได้

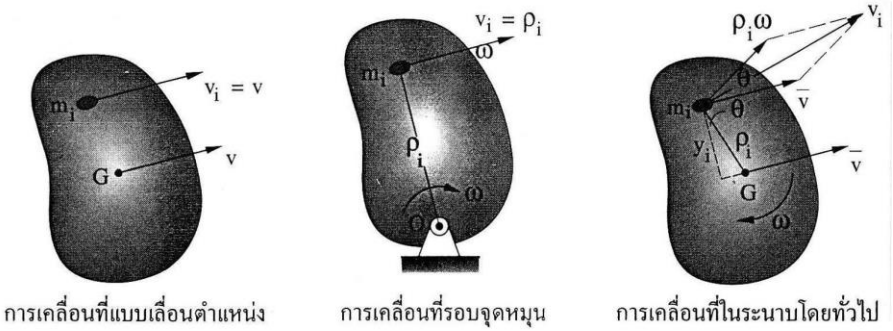
$$U_{1\to2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta$$

ถ้าขนาดของโมเมนต์ M คงที่ สมการข้างต้นสามารถแสดงได้คือ

$$U_{1\to2} = M(\theta_2 - \theta_1)$$

1. พลังงานจลน์ของวัตถุเคลื่อนที่

ΔT คือการเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของวัตถุโดยพลังงานจลน์ (T) ของวัตถุเกร็งจะขึ้นอยู่กับแบบของการเคลื่อนที่ ซึ่งมีรายละเอียด คือ



การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง การเคลื่อนที่รอบจุดหมุน การเคลื่อนที่ในระนาบโดยทั่วไป

รูปที่ 6.11 ลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็ง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 4/14

เนื้อหา

1. การเลื่อนไหลทั้งในแนวเส้นตรงและเส้นโค้ง

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

เมื่อ

m คือ มวลของวัตถุ

v คือ ความเร็วของจุดใดจุดหนึ่งบนวัตถุเกร็ง

2. การหมุนรอบแกนคงที่

$$T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$$

เมื่อ

I_O คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบจุดหมุน (O)

ω คือ ความเร็วเชิงมุมของวัตถุเกร็ง

3. การเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

$$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$

เมื่อ

m คือ มวลของวัตถุ

$\bar{v}$ คือ ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุเกร็ง

$\bar{I}$ คือ โมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบจุดศูนย์กลางมวล

ω คือ ความเร็วเชิงมุมของวัตถุเกร็ง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 5/14

เนื้อหา

เมื่อ

m คือ มวลของวัตถุ

h คือ ระยะในแนวดิ่งจากแนวระดับที่กำหนด

Δv_e คือ การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์เนื่องจากการยืดหยุ่นสำหรับสปริงจะได้ ค่าพลังงานศักย์เนื่องจากการยืดหยุ่น (v_e) มีค่าเป็น

$$v_e = \frac{1}{2}kx^2$$

เมื่อ

k คือ ค่าคงที่ของสปริง

x คือ ระยะยืดหรือหด ซึ่งก็คือระยะที่เปลี่ยนแปลงจากตำแหน่งที่ยังไม่ยืดหรือหด

กำลังงาน

กำลังงาน (Power) คือ อัตราส่วนของงานต่อเวลาที่เกิดขึ้นในช่วงการเกิดงาน กำลังงานมีหน่วยเป็นวัตต์ (W)

กำลังงาน $P = \frac{du}{dt}$

ในกรณีที่วัตถุถูกแรง F กระทำ ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ไปด้วยความเร็ว v

กำลังงาน $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$

ในกรณีวัตถุหมุนไปด้วยความเร็ว ω อันเกิดจากโมเมนต์คู่ควบ M

กำลังงาน $P = M\omega$

จะได้ $P = \frac{du}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} + M\omega$

เมื่อ F คือ แรงลัพธ์

M คือ โมเมนต์ของแรงคู่ควบ

V คือ ความเร็วของวัตถุ

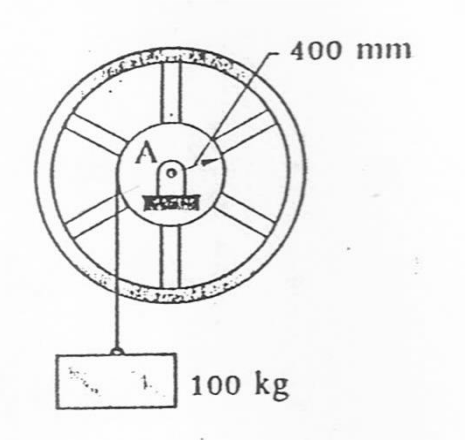
ω คือ ความเร็วเชิงมุมของวัตถุ

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 6/14

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1

ก้อนวัตถุมวล 100 kg ยึดด้วยเชือกที่คล้องผ่านรอบล้อกลมรัศมี 400 mm อยู่กลางของกงล้อซึ่งมีโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกนเซนทรอยด์ $I = 15\ kg.m^2$ จากตำแหน่งที่แสดง ก้อนวัตถุมีความเร็ว 2 m/s ทิศทางดิ่งลง ความเสียดทานที่ลูกปืน A เป็นชนิดความเสียดทานแห้ง โมเมนต์เสียดทาน M ที่ลูกปืนมีค่าเท่ากับ 80 N – m จงหาความเร็วของก้อนวัตถุเมื่อก้อนวัตถุเคลื่อนที่ลงมาอีก 1.2 m



วิธีทำ

เราพิจารณาระบบทั้งชุดเป็นวัตถุเกร็งระบบอุดมคติ ดังนั้นแรงดึงในเส้นเชือกและแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ A ไม่ได้ทำให้เกิดงาน

$$W = mg$$

$$= 100\ (9.81) = 981\ N$$

$$\bar{v}_1 = 2\ m/s$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 7/14

เนื้อหา

$$\omega_1 = \frac{\bar{v}_1}{r} = \frac{2}{0.4} = 5 \text{ rad/s}$$

$$V_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(100)(2^2) + \frac{1}{2}(15)(5^2)$$

$$= 388 \text{ J}$$

ที่ตำแหน่งสุดท้าย

ให้ความเร็วของก้อนวัตถุที่ตำแหน่งที่ต้องการเป็น v_2

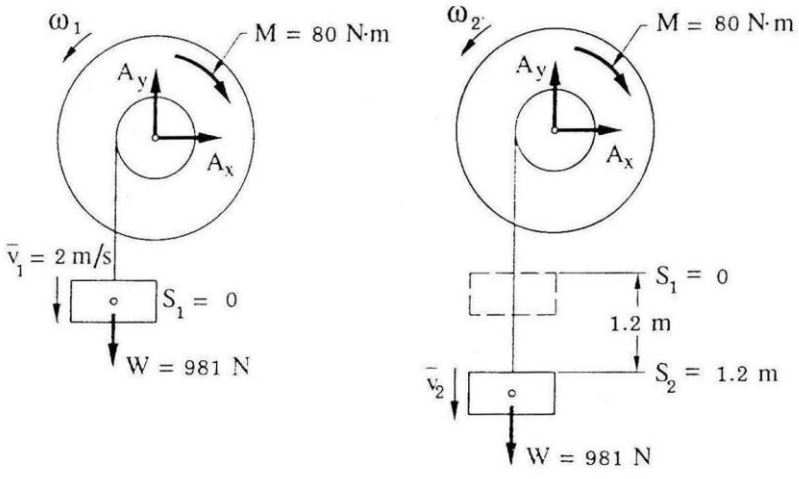
ดังนั้น

$$\omega_2 = \frac{\bar{v}_2}{0.4} \text{ rad/s}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}(100)(\bar{v}^2)^2 + \frac{1}{2}(15)\left(\frac{\bar{v}^2}{0.4}\right)$$

$$= 96.9 \ \bar{v}_2^2$$



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 8/14

เนื้อหา

งานที่เกิดขึ้นระหว่างการเปลี่ยนภาวะเริ่มต้นไปเป็นภาวะสุดท้าย เกิดขึ้นจากแรง W และโมเมนต์คู่ควบ M สังเกตได้ว่างานที่เกิดจากแรง W เป็นค่าบวก ส่วนงานจากโมเมนต์คู่ควบ M ทำให้เกิดงานลบ

ตำแหน่งเริ่มต้น $S_1 = 0, \theta_1 = 0$

ตำแหน่งสุดท้าย $S_1 = 1.2$ m

$$\theta_2 = \frac{S_2}{r} = \frac{1.2}{0.4} = 3 \text{ rad}$$

$$U_{1\to2} = W(S_2 - S_1) + M(\theta_2 - \theta_1)$$

$$= 981\,(1.2) + [-80(3)]$$

$$= 937 \text{ J}$$

จากหลักการของงานและพลังงาน

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$388 + 937 = 96.9\, v_2^2$$

ดังนั้น $v_2 = 3.70$ m/s **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 9/14

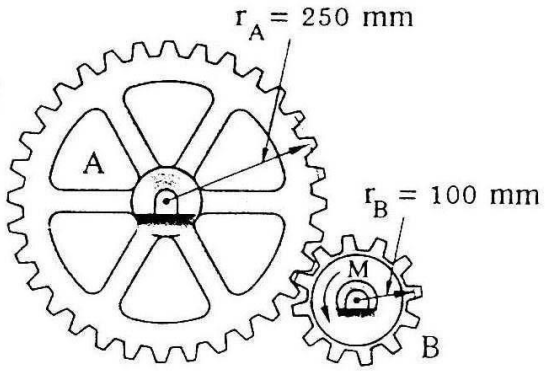
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2

เฟือง A มวล 10 กิโลกรัม มีรัศมีไจเรชั่น 200 mm และเฟือง B มีมวล 3 กิโลกรัมและรัศมีไจเรชั่น 80 mm มีโมเมนต์คู่ควบ M ขนาด 6 N.m กระทำที่เฟือง B ขณะที่เฟือง B หยุดนิ่ง จงหา

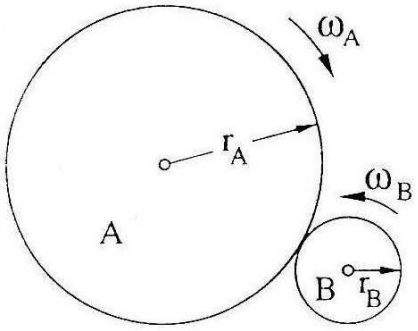
ก) จำนวนรอบของเฟือง B ก่อนที่ความเร็วเชิงมุมจะถึง 600 รอบ/นาที

ข) แรงในแนวสัมผัสที่เฟือง B กระทำต่อเฟือง A



<u>วิธีทำ</u>

ก) ความเร็วที่ผิวสัมผัสเฟืองเชิงเส้นจะเท่ากันทั้งสองเฟือง



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 10/14

เนื้อหา

$$r_A\omega_A = r_B\omega_B$$

$$\omega_A = \omega_B\left(\frac{r_B}{r_A}\right) = \omega_B\left(\frac{100}{250}\right)$$

$$= 0.4\omega_B$$

เมื่อ $\omega_B = 600$ รอบ/นาที

$$= 62.8 \text{ rad/s}$$

$$\omega_A = 0.4(62.8) = 25.1 \text{ rad/s}$$

$$\bar{I}_A = m_A\bar{k}_A^2 = (10)(0.2\ 2)$$

$$= 0.4 \text{ kg .m}^2$$

$$\bar{I}_B = m_A\bar{k}_A^2 = (3)(0.08\ 2)$$

$$= 0.0192 \text{ kg .m}^2$$

พลังงานจลน์

ที่จุดเริ่มต้น $T_1 = 0$

ที่จุดสุดท้าย $T_2 = \frac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_B\omega_B^2$

$$= \frac{1}{2}(0.4)(25.1^2) + \frac{1}{2}(0.0192)(62.8^2)$$

งาน ให้มุม θ_B เป็นการขจัดเชิงมุมที่เฟือง B หมุนไป

$$U_{1\to2} = M\theta_B$$

$$= (6)(\theta_B) = 6\theta_B \text{ J}$$

หลักของงานและพลังงาน

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$0 + 6\theta_B = 163.9$$

$$\theta_B = 27.32 \text{ rad}$$

$$= 4.35 \text{ รอบ}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 11/14

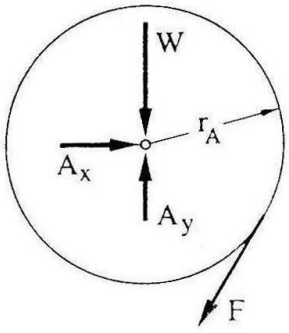
เนื้อหา

ข. พิจารณาเฉพาะเฟือง A

พลังงานจลน์

ที่จุดเริ่มต้น $T_1 = 0$

ที่จุดความเร็วเชิงมุมของเฟือง B มีค่า 600 รอบต่อนาที



$$T_2 = \frac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2$$

$$= \frac{1}{2}(0.4)(25.1^2)$$

$$= 126 \text{ J}$$

งาน แรง F ที่เกิดขึ้นทำให้เกิดงานในการหมุนเฟือง A ไปได้เป็นระยะทาง $r_A\theta_A$ ซึ่ง $r_A\theta_A = r_B\theta_B$

$$U_{1\to2} = F(r_B\,\theta_B)$$

$$= F\,(27.32)(0.1) = 2.73\ F$$

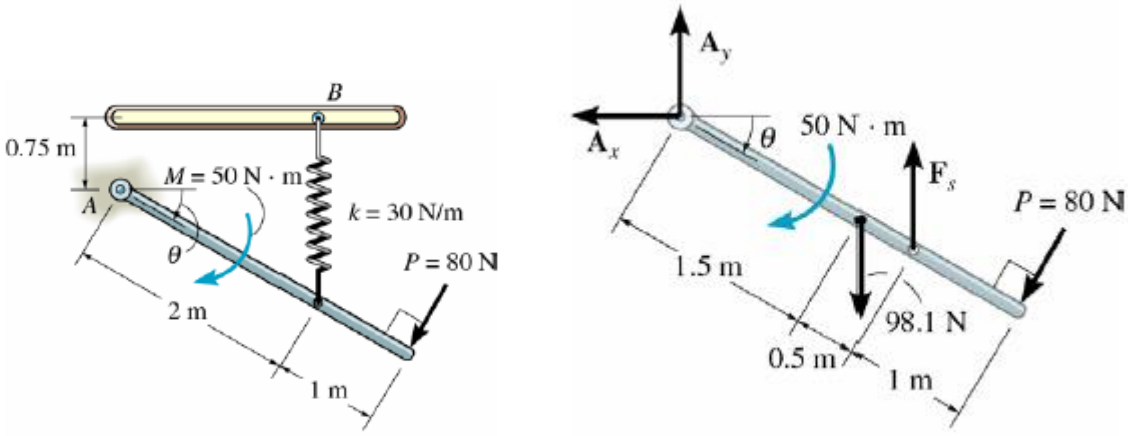
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 12/14

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยการแสดงวิธีทำ

ข้อที่ 1 : กลไกดังแสดงในภาพมีมวล m =10 kg อยู่ภายใต้การกระทำของโมเมนต์คู่ควบ M = 50 N.m และมีแรง P = 80 N กระทำที่ปลายของแขนของกลไกดังแสดงในภาพ ถ้าสปริงมีค่า k = 30 N/m และในขณะที่มุม θ = 0 องศานั้น สปริงยืดจากระยะปกติเท่ากับ 0.5 m จงหางานสุทธิของกลไกนี้เมื่อมุม θ = 90 องศา

ตอบ. $U_W = 1472\text{J} + 78.5\text{J} + 377.0\text{J} = 528\ \text{J}$

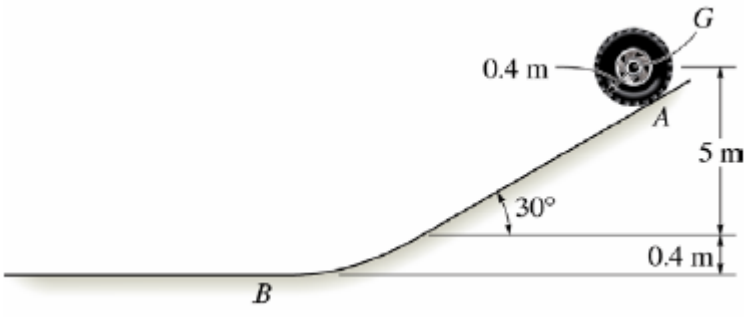


(A) **(B)**

รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ข้อที่ 2. ล้อยางของรถยนต์อันหนึ่งมีมวล 7 kg และมีรัศมีไจเรชั่น k_G = 0.3 m ถ้าล้อยางนี้เคลื่อนที่ลงมาจากตำแหน่งสูงสุด จงหาค่าความเร็วเชิงมุมของล้อยางเส้นนี้เมื่อเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่ง B

ตอบ. $\omega = 19.8$ rad/s



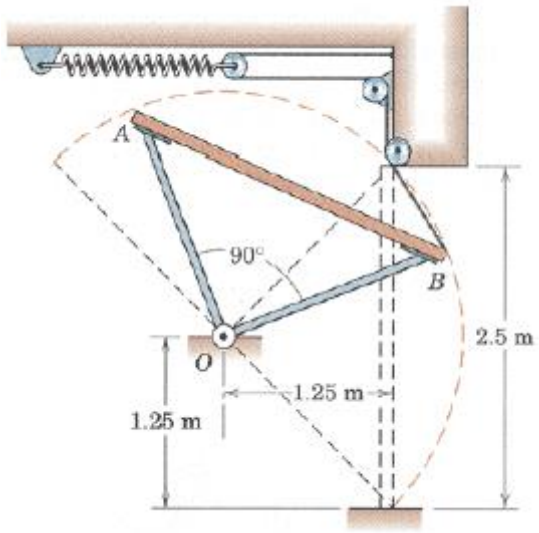
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 13/14

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ประตูโรงรถ AB มีขนาด 2.5 x 5 m (หนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่น) และมีมวล 200 kg ใช้สปริงดึงที่ขอบด้านบนข้างละอัน เมื่อประตูเปิดอยู่ในแนวระดับ สปริงจะไม่ถูกยืด จงหาค่า k ของสปริงแต่ละอันที่จะทำให้ความเร็วเชิงมุมของประตูมีค่าไม่เกิน 1.5 rad/s เมื่อขอบ B กระทบพื้นพอดี

ตอบ. k = 1,2693.5 N/m



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 463-488
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 236-250
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 427-428
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 451-421
- เอกสารหมายเลข 9 หน้าที่ 404-410
- เอกสารหมายเลข 10 หน้าที่ 444</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 16
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 16
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 16</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถาม
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 17	ใบเตรียมการสอน	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ	หน่วยที่ 6 จลนพลศาสตร์ของวัตถุเกร็ง	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 1/19

ชื่อบทเรียน

6.4 อิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง

จุดประสงค์การสอน

6.4 เข้าใจหลักการวิเคราะห์อิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็งได้ถูกต้อง

6.4.1 อธิบายสมการอิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง

6.4.2 อธิบายหลักการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

6.4.3 คำนวณการเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 2/19

เนื้อหา

6.4 อิมพัลส์และโมเมนตัมของวัตถุเกร็ง (Impulse and Momentum)

ในหัวนี้ เราจะได้นำหลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม(Impulse and Momentum)มาใช้วิเคราะห์การเคลื่อนที่ของวัตถุเกร็งในระนาบ

1. โมเมนตัมเชิงเส้น

ในหน่วยการเรียนที่ 4 ได้กล่าวถึงโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบอนุภาค $\vec{G} = \sum m_i \vec{v}_i$ โดย $\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i$ คือ ความเร็วของอนุภาคมวล m_i เราสามารถเขียนได้เป็น $\vec{G} = \frac{d}{dt}(\sum m_i \vec{r}_i)$ แต่ $\sum m_i \vec{r}_i = m\vec{\bar{r}}$ ดังนั้นจะได้ $\vec{G} = \frac{d(m\vec{\bar{r}})}{dt} = m\dot{\vec{\bar{r}}}$ หรือ

$$\vec{G} = m\vec{v} \qquad \text{... (6.23)}$$

เมื่อ

$\vec{\bar{v}}$ คือ ความเร็วของจุดศูนย์กลางมวล

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงและโมเมนตัมสำหรับวัตถุเกร็ง คือ

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}} \quad \text{หรือ} \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum F dt = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 \qquad \text{... (6.24)}$$

เมื่อแยกเขียนในแต่ละแนวย่อย จะได้ว่า

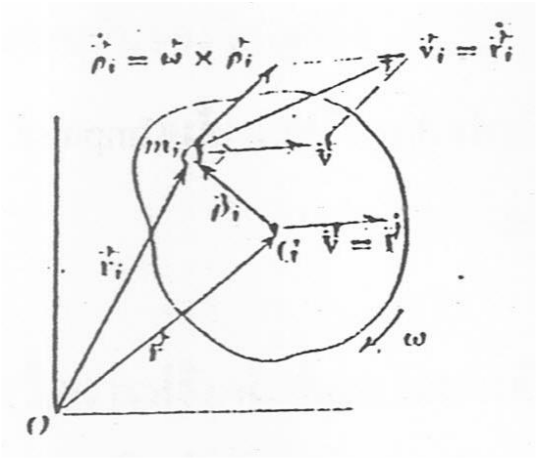
$$\sum F_x = \dot{G}_x \quad \text{หรือ} \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum F_x dt = \vec{G}_{x_2} - \vec{G}_{x_1}$$

$$\sum F_y = \dot{G}_y \quad \text{หรือ} \quad \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y dt = \vec{G}_{y_2} - \vec{G}_{y_1}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 3/19

เนื้อหา

2. โมเมนตัมเชิงมุม



รูปที่ 6.12 ลักษณะของการเกิดโมเมนตัมเชิงมุม

พิจารณาวัตถุเกร็งในรูปที่ 6.12 ถ้าวัตถุเกร็งเคลื่อนที่ไปในระนาบ โดยใช้จุดศูนย์กลางมวล มีความเร็ว $\vec{\bar{v}}$ และวัตถุหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด G คือ

$$\vec{\bar{H}} = \sum(\vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i)$$

ความเร็ว $\vec{v}_i$ จะประกอบด้วยส่วนของการเลื่อนไหล (Translation) คือ $\vec{\bar{v}}$ และส่วนของการหมุน (Rotation) คือ $\dot{\vec{\rho}}_i$ เทียบกับจุด G

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i \quad \text{และ} \quad |\vec{\rho}_i| = \rho_i \omega$$

นั่นคือ

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i \times \dot{\vec{\rho}}_i$$

$$\vec{\bar{H}}_i = \sum[\, \vec{\rho}_i \times m_i (\dot{\vec{\rho}}_i + \vec{\bar{v}})\,]$$

$$= \sum \rho_i^2 m_i \, \omega k + \sum(\vec{\rho}_i m_i \vec{\bar{v}}) \qquad \text{เมื่อ} \quad (\dot{\vec{\rho}}_i = \rho_i \omega k)$$

$$= \bar{I}\, \omega k + (-\vec{\bar{v}} \times \sum m_i \vec{\rho}_i)$$

$$= \bar{I}\, \omega k + (-\vec{\bar{v}} \times m \bar{\rho})$$

ดังนั้น $\vec{\bar{H}}_i = \bar{I}\, \omega k$ เมื่อ $(\bar{\rho} = 0)$

ทิศทางของโมเมนตัมเชิงมุม $\vec{\bar{H}}$ จะอยู่ในแนวตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่เสมอ โดยมีทิศทางเดียวกับ $\vec{\omega}$ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล จึงเขียนเฉพาะขนาดได้ดังนี้ คือ

$$\bar{H} = \bar{I}\, \omega k \qquad \text{... (6.25)}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 4/19

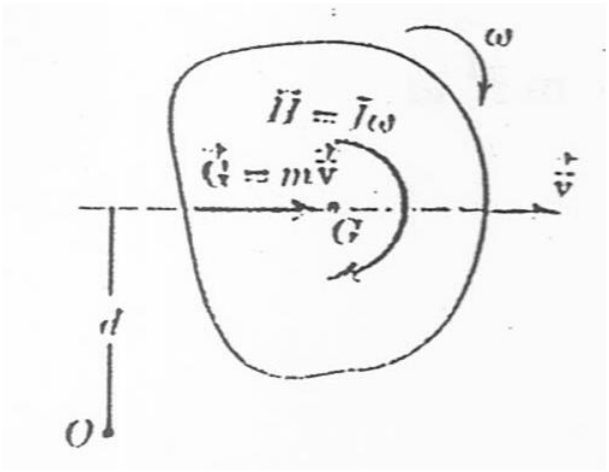
เนื้อหา

ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์ และโมเมนตัมเชิงมุมสำหรับวัตถุเกร็ง คือ

$$\Sigma \overline{M} = \dot{\overline{H}} \quad \text{หรือ} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{M}\, dt = \overline{H}_2 - \overline{H}_1 \qquad \text{... (6.26)}$$

โดย

$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \overline{M}\, dt = \overline{H}_2 - \overline{H}_1$ คือ ผลรวมของอิมพัลส์เชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล G ในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2



รูปที่ 6.13 การเกิดโมเมนตัมรอบจุด G

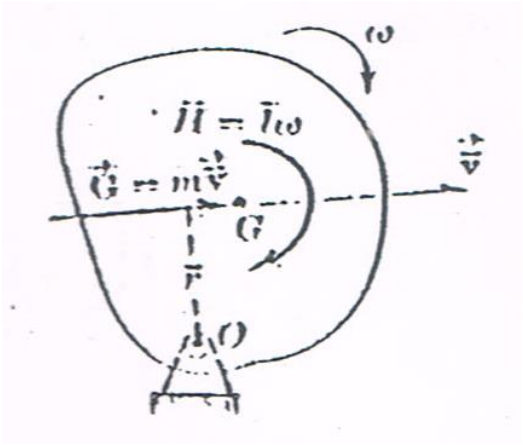
จากรูปที่ 6.13 วัตถุเกร็งมีโมเมนตัมรอบจุด G คือ $\overline{H} = \bar{I}\,\omega\,k$ และมีโมเมนตัมเชิงเส้น $G = mv$ หากเราพิจารณาโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด O คือ H_O จะได้ว่า

$$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}d \qquad \text{... (6.27)}$$

โดยที่จุด O อาจจะเป็นจุดที่คงที่หรือเคลื่อนที่ก็ได้

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 5/19

เนื้อหา



ในกรณีที่วัตถุหมุนรอบจุดคงที่ O ดังรูปที่ 6.14 $\bar{v} = \bar{r}\,\omega$ และ $d = \bar{r}$ เมื่อแทนค่าในสมการที่ (6.27) จะได้ว่า

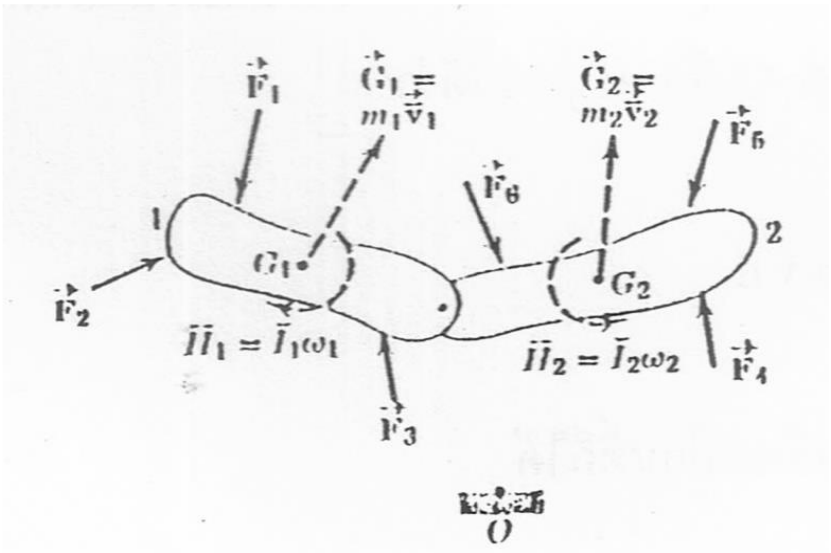
$$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{r}^2\,\omega$$

แต่ $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ ดังนั้น

$$H_O = I_O\,\omega \qquad \text{... (6.28)}$$

และเนื่องจาก $[\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O]$

ดังนั้น $\sum M_O = I_O\,\dot{\omega}$ หรือ $\int_{t_1}^{t_2} \sum M_O\,dt = I_O\,(\omega_2 - \omega_1)$ ... (6.29)



รูปที่ 6.15 การเชื่อมต่อกันของวัตถุเกร็ง

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 6/19

เนื้อหา

ในกรณีที่วัตถุเกร็งเชื่อมต่อกันภายในระบบ ดังรูปที่ 6.14 โดยมีจุด O เป็นจุดอ้างอิงคงที่

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}$$

$$\sum \vec{F} = \dot{\vec{G}}_1 + \dot{\vec{G}}_2 + ... \quad \text{... (6.30)}$$

$$\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_O$$

$$\sum \vec{M}_O = \dot{\vec{H}}_{O_1} + \dot{\vec{H}}_{O_2} + ... \quad \text{... (6.31)}$$

หรือ

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}\, dt = (\Delta \vec{G})_{system}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_O\, dt = (\Delta \vec{H}_O)_{system}$$

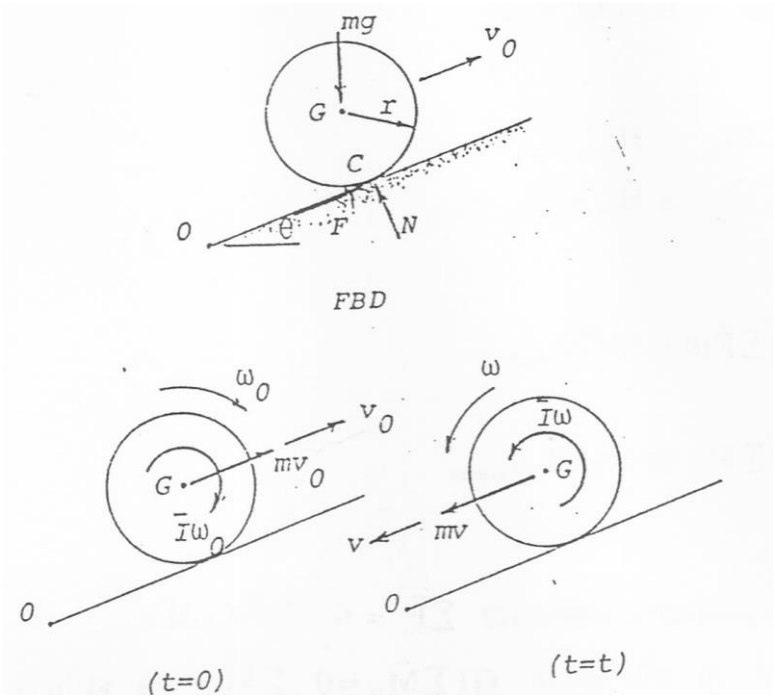
ในกรณีที่ไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อระบบ $\sum \vec{F} = 0$ นั่นคือ $(\Delta \vec{G})_{system} = 0$ และในกรณีที่ไม่มีโมเมนต์รอบจุดคงที่ O หรือรอบจุด G ($\sum \vec{M}_O = 0$, $\sum \vec{\bar{M}} = 0$) จะได้ว่า $\Delta \vec{H}_O = 0$ หรือ $\Delta \vec{\bar{H}} = 0$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 17 เลขหน้า 7/19

เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 1 :

ทรงกระบอกมวล m รัศมี r กลิ้งขึ้นไปตามพื้นเอียงด้วยความเร็วที่จุด G เท่ากับ v_O ถ้าทรงกระบอกกลิ้งขึ้นไปโดยไม่เกิดการไถล จงหา ความเร็ว v ของจุด G เมื่อเวลา t



วิธีทำ :

จากรูป FBD จุด C จะเป็นจุดหมุนชั่วขณะ เลือกจุด O บนพื้นเอียงเป็นจุด Moment Center เพื่อขจัดโมเมนต์ของแรง F ซึ่งยังมาทราบค่า

$$H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}d$$

ในที่นี้ $\bar{v} = r\omega$, $d = r$ ดังนั้น $H_O = \bar{I}\omega + mr^2\omega = \omega(\bar{I} + mr^2)$

แต่ $I_C = \bar{I} + mr^2$ ดังนั้น $H_O = I_C\omega$

และจาก $[\int \Sigma M_O\, dt = \Delta H_O]$ ทิศทางทวนเข็ม

จะได้ $$\int_0^t mgr\sin\theta\, dt = I_C[\omega - (-\omega_O)]$$

โมเมนต์ของ N และ $mg\cos\theta$ รอบจุด O มีค่าเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม จึงตัดกันไป

ดังนั้น $$mgrt\sin\theta = \frac{3}{2}mr^2\frac{v + v_O}{r}$$ เมื่อ $v = r\omega$

$$v = \frac{2}{3}gt\sin\theta - v_O$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 8/19

เนื้อหา

ถ้าคิดโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุดศูนย์กลางมวล G จะได้ว่า

$[\int \sum \overline{M}\, dt = \Delta \overline{H}\,]$ ทิศทางทวนเข็ม

จะได้ $$\int_0^t F\, r\, dt = \bar{I}[\omega - (-\omega_O)] \qquad ....(1)$$

$[\int \sum F\, dt = \Delta G\,]$ ทิศทางเดียวกันกับ v

จะได้ $$\int_0^t (m\, g \sin\theta - F)\, dt = m[v - (-v_O)] \qquad ....(2)$$

จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้ค่า v เช่นเดียวกับข้างต้น

ข้อสังเกต :

ในการวิเคราะห์โดยใช้สมการของ Impulse and Momentum จะประกอบไปด้วยแผนภาพจำนวนสามรูป คือ FBD 1 : จะแสดงค่าโมเมนตัมทั้งเชิงเส้นและเชิงมุมของวัตถุที่เวลา t_1 และรูปแสดงค่าโมเมนตัมทั้งเชิงเส้นและเชิงมุมของวัตถุ ที่เวลา t_2 การแทนค่าอิมพัลส์ ซึ่งเป็นเทอมด้านซ้ายของสมการก็อาศัยการพิจารณาจากรูป FBD ส่วนการเปลี่ยนแปลงของโมเมนตัมซึ่งเป็นเทอมทางขวาของสมการ ก็อาศัยพิจารณาจากรูปที่เวลา t_1 และ t_2 ทั้งนี้ ในการแทนค่า จะต้องคำนึงถึง เครื่องหมายตามทิศทางของโมเมนตัมด้วย

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 9/19

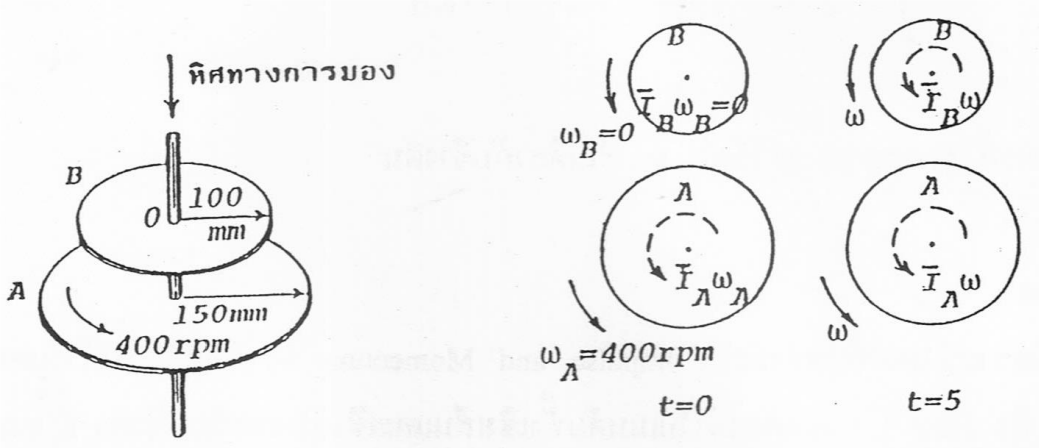
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 2 :

จานกลม A และ B ทำด้วยวัสดุชนิดเดียวกัน สามารถหมุนได้อิสระรอบแกนดิ่ง จาน B ซึ่งอยู่นิ่งถูกวางลงบนจาน A ซึ่งหมุนด้วยความเร็ว 400 rpm ในทิศทางดังรูป มวลของจาน A เท่ากับ 4 kg จงหา

ก) ความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของจานกลมทั้งสอง

ข) การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์ของระบบ



วิธีทำ :

$$m_A = 4 \text{ kg} \ , \ m_B = \left(\frac{100}{150}\right)^2 m_A = 1.78 \text{ kg}$$

$$I_A = \frac{1}{2}(4)(0.15)^2 = 0.045 \text{ kg.m}^2 \ ,$$

$$I_B = \frac{1}{2}(1.78)(0.10)^2 = 8.89 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 10/19

เนื้อหา

ก) ที่ความเร็วเชิงมุมสุดท้าย การไถลระหว่างผิวสัมผัสของวงกลมทั้งสองจะสิ้นสุดลง จานกลมทั้งสองจะหมุนไปพร้อมกันด้วยความเร็วเชิงมุม ω

$[\int \sum M_O \, dt = \Delta H_O]$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ในที่นี้ $\sum M_O = 0$ ดังนั้น $\int \sum M_O \, dt = 0$

$$(\Delta H_O)_B = \bar{I}_B \, \omega - 0 = (8.89 \times 10^{-3})\omega$$

$$(\Delta H_O)_A = \bar{I}_A(\omega_2 - \omega_1) = 0.045\,(\omega - 41.88)$$

แทนค่า

$$0 = (8.89 \times 10^{-3})\,\omega + 0.045(\omega - 41.88)$$

$$\omega = 34.97 \text{ rad/s} = 334 \text{ rpm}$$ ตอบ

ข) จากสมการ $T = \frac{1}{2} I_O \, \omega^2$

ดังนั้น $\Delta T_B = \frac{1}{2}(8.89 \times 10^{-3})(34.97)^2 = 5.43 \text{ J}$

$$\Delta T_A = \frac{1}{2}(0.045)[(34.97)^2 - (41.88)^2] = -11.94 \text{ J}$$

นั่นคือ $\Delta T = \Delta T_A - \Delta T_B = -11.94 + 5.43 = -6.51 \text{ J}$ ตอบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 17 เลขหน้า 11/19

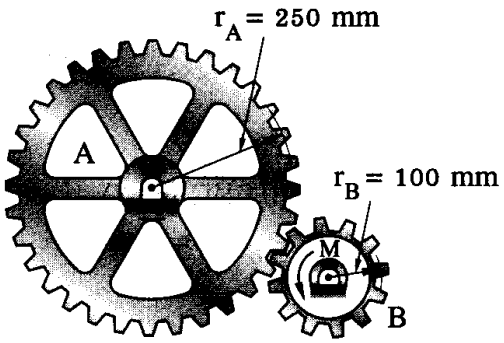
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 3 (การแก้ปัญหาโดยใช้หลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัม)

เฟือง A มวล 10 กิโลกรัม มีรัศมีการหมุน 200 mm ขณะที่เฟือง B มีมวล 3 กิโลกรัม รัศมีการหมุน 80 mm ระบบเดิมหยุดนิ่ง ต่อมามีโมเมนต์คู่ควบ M ขนาด 6 Nm กระทำที่เฟือง B เมื่อไม่มีแรงเสียดทาน จงหา

ก) เวลาที่ใช้ในการทำให้เฟือง B มีความเร็วเชิงมุมเพิ่มขึ้นเป็น 600 รอบ/นาที

ข) แรงในสัมผัสที่เฟือง B กระทำกับเฟือง A



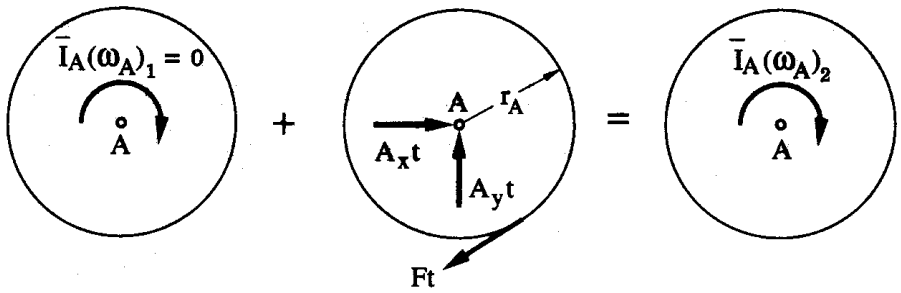
วิธีทำ

ก) เราพิจารณาหลักการของอิมพัลส์และโมเมนตัมมาแก้ปัญหาเพราะมีช่วงเวลามาเกี่ยวข้อง

$\bar{I}_A = 0.4 \text{ kg m}^2$ $\bar{I}_B = 0.0192 \text{ kg m}^2$

$(\omega_A)_2 = 25.1 \text{ rad/s}$ $(\omega_B)_2 = 62.8 \text{ rad}$

พิจารณาเฟือง A



$$(H_A)_1 + \int_0^t M dt = (H_A)_2$$

$$0 - Fr_A t = -\bar{I}_A(\omega_A)_2$$

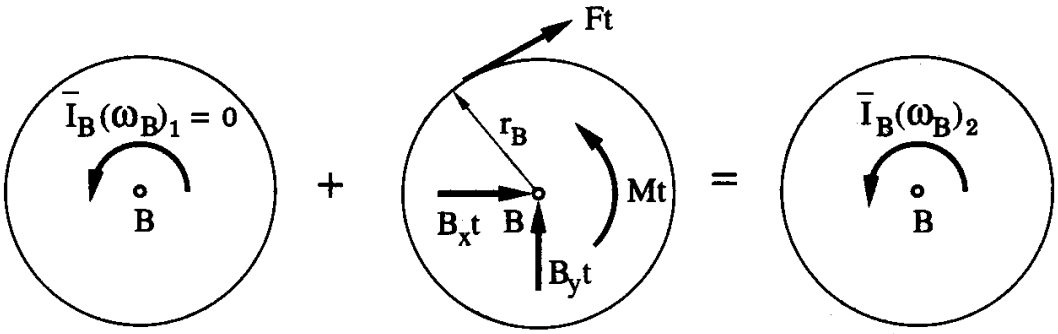
$$Ft\,(0.25) = (0.4)(25.1)$$

$$Ft = 40.2 \text{ N.s}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 12/19

เนื้อหา

พิจารณาเฟือง B



$$(H_B)_1 + \int_O^t Mdt = (H_B)_2$$

$$0 + Mt - Fr_B t = \bar{I}_B (\omega_B)_2$$

$$6t - (40.2)(0.1) = (0.0192)(62.8)$$

$$t = 0.871 \text{ วินาที}$$ **ตอบ**

ข) จาก $Ft = 40.2$

$$F(0.871) = 40.2$$

$$F = 46.2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 13/19

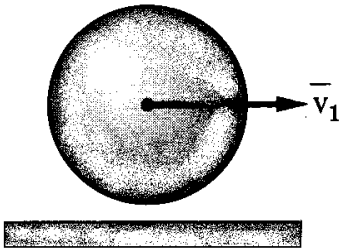
เนื้อหา

ตัวอย่างที่ 4

ทรงกลมมวล m รัศมี r ถูกขับให้เคลื่อนที่ไปบนพื้นหยาบด้วยความเร็วเชิงเส้น v_1และไม่มีความเร็วเชิงมุม เมื่อให้ μ_k เป็นค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างพื้นและทรงกลม จงหา

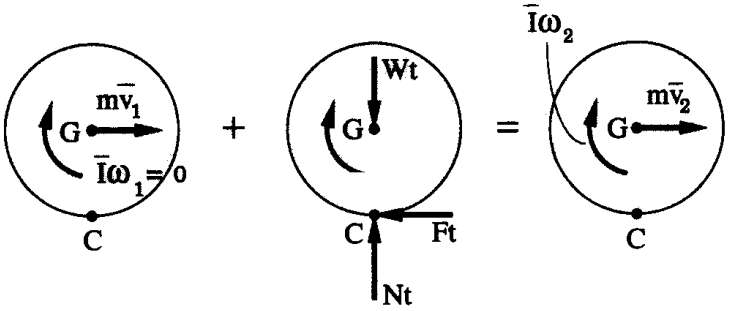
ก) ที่เวลา t ซึ่งทรงกลมจะเริ่มกลิ้งโดยปราศจากการลื่นไถล

ข) ความเร็วเชิงเส้นและเชิงมุมของทรงกลมที่เวลา t



วิธีทำ

ก) ขณะที่ทรงกลมลื่นไถลตามพื้นจะมีแรงเกิดขึ้น 3 แรง คือ แรงเสียดทาน แรงปฏิกิริยาในแนวตั้งฉากกับผิวสัมผัส และแรงเนื่องจากแรงดึงดูดของโลก



จากสมการของอิมพัลส์และโมเมนตัม

โมเมนตัมเชิงเส้น

ทางแกนy $\quad G_{1y} + \int_{t_1}^{t_2} \sum F_y dt = (G_{2y})$

$0 + Nt - Wt = 0 \qquad (1)$

ทางแกนx $\quad m\bar{v}_1 - F_t = m\bar{v}_2 \qquad (2)$

โมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด G

$(H_G)_1 + \int_O^t M_G dt = (H_G)_2$

$0 + Frt = \bar{I}\omega_2 \qquad (3)$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 14/19

เนื้อหา

โดยที่ $N = W = mg$

$F = \mu_k N = \mu_k mg$

แทนค่า F ในสมการ (2)

$$m\bar{v}_1 - \mu_k mg = m\bar{v}_2$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v}_1 - \mu_k gt \qquad (4)$$

แทนค่า $F = \mu_k mg$ และ $\bar{I} = \frac{2}{5} mr^2$ ในสมการ (3)

$$\mu_k mg\, rt = \frac{2}{5} mr^2 \omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{2}{5}\left(\frac{\mu_k g}{r}\right)t \qquad (5)$$

เนื่องจาก $v_2 = r\omega_2$ แทนค่าในสมการ (4)

$$r\frac{2}{5}\left(\frac{\mu_k g}{r}\right) = \bar{v}_1 - \mu_k gt$$

$$t = \frac{2}{7}\left(\frac{\bar{v}_1}{\mu_k g}\right)$$ **ตอบ**

ข) แทนค่า t ในสมการ (5)

$$\omega_2 = \frac{2}{5}\left(\frac{\mu_k g}{r}\right)\frac{2}{7}\left(\frac{\bar{v}_1}{\mu_k g}\right)$$

$$= \frac{5}{7}\left(\frac{\bar{v}_1}{r}\right)$$

$$\bar{v}_2 = r\omega_2$$

$$= r\left(\frac{5}{7}\right)\left(\frac{\bar{v}_1}{r}\right)$$

$$= \frac{5}{7}\bar{v}_1$$ **ตอบ**

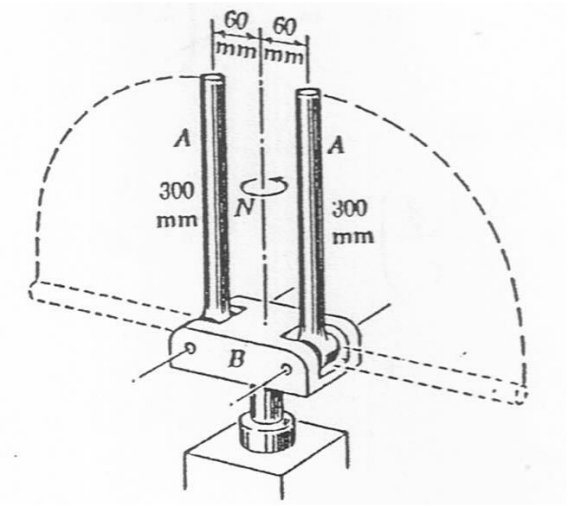
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 15/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้ โดยการแสดงวิธีทำ

ข้อที่ 1 : แท่งวัตถุ A มีขนาดสม่ำเสมอ และมีวามยาว 300 mm จำนวน 2 อัน ดังแสดงในภาพ โดยแต่ละแท่งมีมวล m_A = 1.5 kg ถูกยึดให้ติดกับฐาน B ด้วยสลัก ส่วนฐาน B มีมวล m_B = 4 kg และมีรัศมีไจเรชั่น k = 40 mm และในขณะเริ่มต้นหมุนด้วยความเร็ว 300 รอบต่อนาที โดยแท่งวัตถุจะถูกล็อคให้อยู่ในแนวตั้งฉาก ถ้าปล่อยตัวล็อคและแท่งวัตถุมีตำแหน่งในแนวระดับ จงหาความเร็วรอบของระบบ

ตอบ. N = 32.0 rev/min



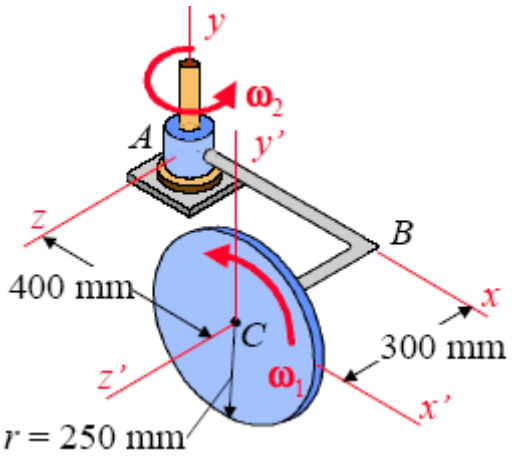
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 1

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 16/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. แผ่นจานกลมดังแสดงในภาพ มีมวล $m = 5\,kg$ หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_1 = 8\,rad/s$ โดยที่แขน AB มีความเร็วเชิงมุม $\omega_2 = 3\,rad/s$ จงหาขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด C

ตอบ. $H_C = 0.234\,\vec{j} + 1.25\,\vec{k}\ \ \frac{kg\,m^2}{s}$



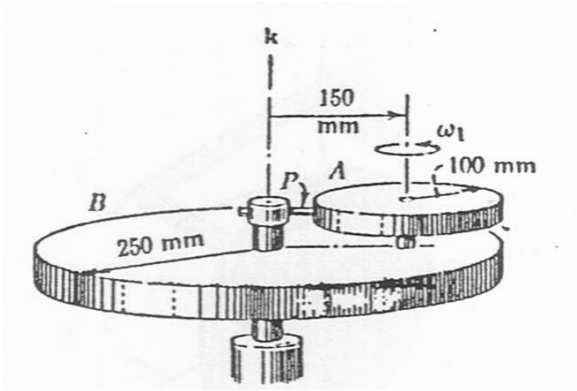
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 2

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 17/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3. จานหมุนตัวใหญ่มีมวล 60 kg และมี Radius of Gyration รอบแกนตั้งฉากเท่ากับ 200mm ส่วนจานกลมตันตัวเล็กมีมวล 8 kg และหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_1 = 80$ rad/s ในขณะเริ่มต้นเมื่อจานตัวใหญ่อยู่ในสภาวะหยุดนิ่ง และเมื่อหมุด P ซึ่งหมุนไปกับจานตัวใหญ่ถูกปล่อยให้กดขอบจานกลมตัวเล็ก จนกระทั่งจานกลมเล็กหยุดหมุน เมื่อเทียบกับจานตัวใหญ่ จงหาความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของระบบดังกล่าว โดยไม่คิดความเสียดทานที่จุดต่าง ๆ

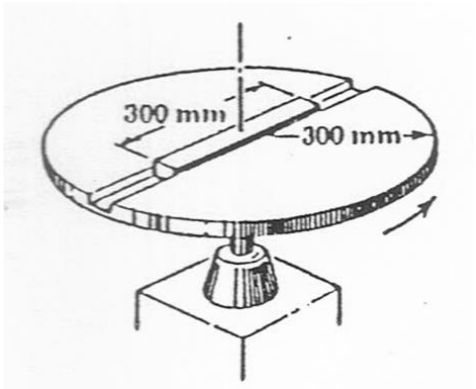
ตอบ. $\omega = 1.22$ rad/s



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 3

ข้อที่ 4. แท่งวัตถุเรียวยาว 300 mm มีมวล 1.6 kg และเมื่อเริ่มต้นอยู่กึ่งกลางของร่องบนจานกลมซึ่งหมุนได้โดยอิสระรอบแกนตั้งฉากด้วยความเร็ว 400 rev/min โดยจานกลมมีมวล 16 kg และมี Radius of Gyration เท่ากับ 225 mm ถ้าแท่งวัตถุถูกผลักเล็กน้อย ก็จะเลื่อนออกจากตำแหน่งกึ่งกลางดังกล่าว จงหาความเร็วของจานเมื่อปลายแท่งวัตถุถึงขอบจาน

ตอบ. N = 383 rev/min



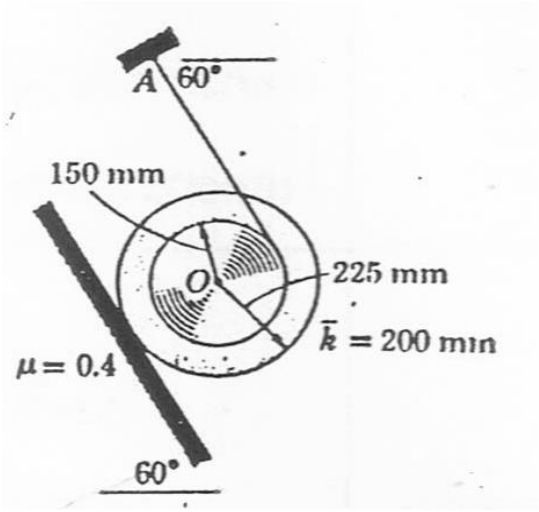
รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 4

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 18/19

แบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5. ล้อรัศมี 225 mm ติดกับแกนกลางรัศมี 150 mm มีมวล 60 kg ถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่ง บนพื้นเอียง 60° จงคำนวณหาความเร็วของจุดศูนย์กลาง O เมื่อเวลา 3 s หลังจากปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่ง

ตอบ. $v_O = 3.88$ m/s



รูปภาพประกอบคำถามข้อที่ 5

<table>
<tr><td>วิธีสอนและ
กิจกรรม</td><td colspan="2">- ใช้วิธีการสอนแบบบรรยายประกอบสื่อและถามตอบ
- แสดงตัวอย่างและขั้นตอนในการวิเคราะห์ปัญหา
- ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัด
- ให้นักศึกษาซักถาม</td></tr>
<tr><td rowspan="3">สื่อการสอน</td><td>เอกสารอ้างอิง</td><td>- เอกสารหมายเลข 2 หน้าที่ 489-500
- เอกสารหมายเลข 3 หน้าที่ 250-257
- เอกสารหมายเลข 4 หน้าที่ 461-463
- เอกสารหมายเลข 6 หน้าที่ 442-450</td></tr>
<tr><td>เอกสารประกอบ</td><td>- ใบเตรียมการสอนสัปดาห์ที่ 17
- ใบแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 17
- ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนสัปดาห์ที่ 17</td></tr>
<tr><td>วัสดุโสตทัศน์</td><td>- เครื่องฉายภาพโดยตรง (Direct Projector)
- เครื่องฉายแผ่นโปร่งแสง (Over Head)</td></tr>
<tr><td>งานที่มอบหมาย</td><td colspan="2">ให้นักศึกษาทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียนโดยการแสดงวิธีทำ</td></tr>
<tr><td>การวัดผล</td><td colspan="2">- สังเกตความสนใจและการให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรม
- การซักถาม การตอบคำถามของนักศึกษา
- ผลจากการทำแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน</td></tr>
<tr><td colspan="3">บันทึกการสอนและข้อสังเกต :</td></tr>
</table>

สัปดาห์ที่ 18	**ใบเตรียมการสอน**	รหัสวิชา 11-311-302
เวลา 3 คาบ		

สอบปลายภาคเรียน

บรรณานุกรม

1. จรัส บุณยธรรมา. **กลศาสตร์เวกเตอร์ พลศาสตร์ภาคแรก** . กรุงเทพฯ.: สุถีริยาสาส์น , 2543.
2. วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร และคณะ. **กลศาสตร์วิศวกรรม ฉบับเสริมประสบการณ์ภาคพลศาสตร์** (Dynamics) กรุงเทพ ฯ .: ซีเอ็ด ยูเคชั่น , 2537.
3. วีระศักดิ์ กรัยวิเชียร และคณะ. **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคพลศาสตร์.** กรุงเทพ ฯ . : บริษัท วิทยพัฒน์ จำกัด. 2540.
4. วัชรินทร์ วิทยกุล. **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคพลศาสตร์ ฉบับเสริมประสบการณ์.** กรุงเทพฯ. : ฟิสิกส์เซนเตอร์การพิมพ์, 2536.
5. เสถียร วงค์สารเสริฐ และคณะ. **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคพลศาสตร์.** กรุงเทพฯ. : ซีเอ็ด ยูเคชั่น, 2538.
6. สมาน เจริญกิจพูลผล. **กลศาสตร์วิศวกรรม ภาคพลศาสตร์.** กรุงเทพ ฯ.: ฟิสิกส์เซนเตอร์การพิมพ์, 2527.
7. Anthony Bedford and Wallace Fowler . **Engineering Mechanics.** 4th ed., Pearson Education, Inc. 2005 .
8. Beer, Ferdinand Pierre. **Mechanics for Engineering : Dynamics**, McGraw-Hill Books, Singapore, 1987.
9. Meriam, J.L., **Engineering Mechanics, Dynamics**, John Wiley & Sons, Singapore, 1993.
10. Hibbeler R.C., **Engineering Mechanics, Dynamics** , SI Edition, Prentice-Hall, Inc., Singapore, 2004.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก.

ใบเฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน
(สัปดาห์ที่ 1 – 18)

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 1 เลขหน้า 1/2

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

คำสั่ง : จงตอบคำถามต่อไปนี้

ข้อที่ 1. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างสถิตศาสตร์ (STATICS) กับ พลศาสตร์ (DYNAMICS)
ตอบ สถิตศาสตร์ (Statics) เป็นการกล่าวถึงวัตถุที่อยู่ในสภาวะหยุดนิ่ง (สมดุล) ส่วนพลศาสตร์ (Dynamics) จะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุ และผลของแรงที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่

ข้อที่ 2. จงอธิบายความแตกต่างระหว่าง KINEMATICS กับ KINETICS
ตอบ คิเนเมติกส์(Kinematics) จะกล่าวถึงลักษณะการเคลื่อนที่เชิงเรขาคณิตของวัตถุโดยไม่คำนึงถึงแรงที่มากระทำกับวัตถุหรือแรงที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่ ส่วน คิเนติกส์ (Kinetics) กล่าวถึง ความสัมพันธ์ระหว่างแรงที่กระทำต่อวัตถุ มวลของวัตถุและการเคลื่อนที่ของวัตถุ

ข้อที่ 3. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างปริมาณเวกเตอร์ (VECTOR) กับ ปริมาณสเกลาร์ (SCALAR)
ตอบ สเกลาร์(Scalar) คือ ปริมาณที่มีเฉพาะขนาด ส่วน เวกเตอร์(Vector) คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง

ข้อที่ 4. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างมวล (MASS) กับ น้ำหนัก (WEIGHT)
ตอบ มวล(Mass) มีหน่วยเป็น กิโลกรัม (kg) ส่วนน้ำหนักมีหน่วยนิวตัน ($kg.m/s^2$)

ข้อที่ 5. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างระยะทาง (DISTANCE) กับ การขจัด (DISPLACEMENT)
ตอบ ระยะทาง คือระยะทั้งหมดที่เคลื่อนที่ได้ ส่วนการขจัด คือ ระยะทางที่วัดจากจุดเริ่มต้นจนถึงจุดสุดท้าย(เป็นเส้นตรง) ของการเคลื่อนที่

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 1 เลขหน้า 2/2

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 6. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างอัตราเร็ว (SPEED) กับ ความเร็ว (VELOCITY)

ตอบ อัตราเร็ว คือ ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้เทียบกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ ส่วนความเร็ว คือ การขจัดเทียบกับเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่

ข้อที่ 7. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างความเร่ง (ACCELERATION)กับความหน่วง (DECELERATION)

ตอบ ความเร่งคือ การที่อนุภาคมีความเร็วเพิ่มขึ้นในการเคลื่อนที่จากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 2 เช่นการออกตัวของรถยนต์เมื่อมีสัญญาณไฟเขียว ส่วนความหน่วงนั้นอนุภาคจะมีความเร็วลดลงในการเคลื่อนที่จากจุดที่ 1 ไปยังจุดที่ 2 เช่นการลดความเร็วของรถยนต์เมื่อมองเห็นสัญญาณไฟแดง

ข้อที่ 8. จงอธิบายความแตกต่างระหว่างวัตถุเกร็ง (RIGID BODY) กับ วัตถุแปรรูป (DEFORMABLE BODY)

ตอบ วัตถุแปรรูป(Deformable Body) คือ วัตถุซึ่งมีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างเมื่อถูกแรงกระทำ ส่วน วัตถุเกร็ง(Rigid Body) คือวัตถุซึ่งไม่มีการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างเมื่อถูกแรงกระทำ โดยทั่วไปแล้วการเปลี่ยนแปลงขนาดและรูปร่างมีน้อยมาก เมื่อเทียบกับขนาดทั้งหมดของวัตถุก็อาจถือได้ว่าวัตถุนั้นเป็นวัตถุเกร็ง

ข้อที่ 9. จงอธิบายกฎการเคลื่อนที่ของนิวตันทั้งสามข้อ

ตอบ

กฎข้อที่ 1 (First Law) กล่าวว่า วัตถุจะยังคงสภาพหยุดนิ่งหรือการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เว้นเสียแต่ว่าจะมีแรงที่ไม่สมดุลมากระทำ ($\sum F = 0$)

กฎข้อที่ 2 (Second Law) กล่าวว่า ความเร่งของวัตถุจะเป็นปฏิภาคโดยตรงกับแรงลัพธ์ที่มากระทำ และจะมีทิศทางเดียวกันกับแรงลัพธ์นั้น ($\sum F = ma$)

กฎข้อที่ 3 (Third Law) กล่าวว่า เมื่อมีแรงกิริยามากระทำกับวัตถุ จะทำให้มีแรงปฏิกิริยาที่มีขนาดเท่ากับแรงกิริยาที่มากระทำ แต่จะมีทิศทางตรงกันกันข้าม (Action Force = Reaction Force)

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 2 เลขหน้า 1/2

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ด้วยสมการความเร็วดังต่อไปนี้ คือ $v = (8ti + 9t^2j)$ m/s จงหาการขจัดของอนุภาคนี้เมื่อเวลาผ่านไป 1 วินาที

ก) 4 m **[ข) 5 m.]** ค) 6 m. ง) 7 m.

ข้อที่ 2 : ถ้าที่เวลา t = 0 s. อนุภาคอันหนึ่งอยู่ที่ตำแหน่งจุดอ้างอิง (Origin) จงหาระยะทางของอนุภาคนี้ เมื่อเวลาผ่านไป 7 วินาที ถ้าความเร็วของอนุภาคมีค่าคงที่เท่ากับ 2 m/s

ก) 3.5 m ข) 7 m. ค) 10.5 m. [**ง) 14 m.**]

ข้อที่ 3 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีความเร่งในแนวแกน y มีค่าคงที่ $a_y = 3m/s^2$ จงคำนวณหาความสูงที่อนุภาคนี้จะเคลื่อนที่ได้ เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที ($t = 0, v_y = 0$)

[ก) 6 m] ข) 12 m ค) 15 m ง) 18 m

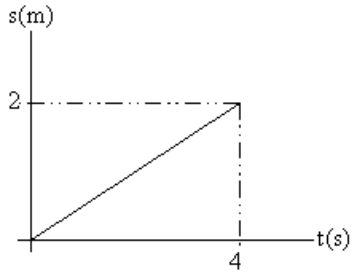
ข้อที่ 4 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงด้วยความเร่งคงที่ $a = (2t)$ m/s^2 จงคำนวณหาความเร็วของอนุภาคเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที โดยกำหนดให้ ที่เวลา t = 0 s , อนุภาคนี้มีความเร็วเท่ากับ 2 m/s.

ก) 5 m/s **[ข) 10 m/s]** ค) 15 m/s ง) 15 m/s

ข้อที่ 5 ถ้า $s = (4t^2)$ m จงคำนวณหาความเร่งของอนุภาคเมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

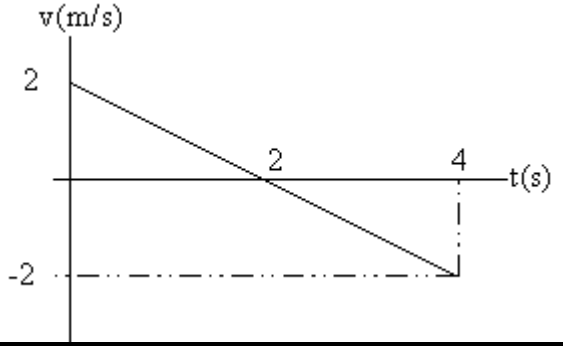
ก) 2 m/s^2 ข) 4 m/s^2 [**ค) 8 m/s^2**] ง) 16 m/s^2

ข้อที่ 6 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ s – t จงหาความเร็วของอนุภาคนี้เมื่อ t = 1 s



[ก) 0.5 m/s]
ข) 1 m/s
ค) 1.5 m/s
ง) 2 m/s

ข้อที่ 7 อนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ v – t ที่กำหนดให้ จงหาตำแหน่งของอนุภาคนี้เมื่อ t = 4 s (s = 1m ที่ t = 0)

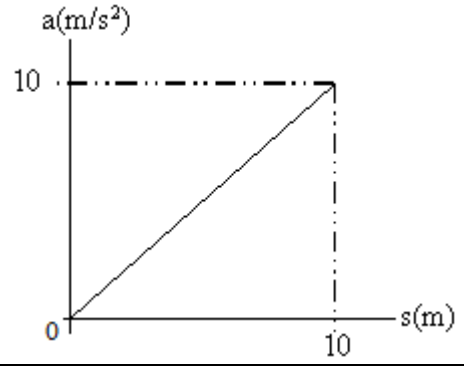


[ก) 1 m]
ข) 2 m
ค) 4 m
ง) 8 m

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 2 เลขหน้า 2/2

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 8 ถ้าอนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ $a-s$ ที่กำหนดให้ จงหาอัตราเร็วของอนุภาคนี้เมื่อ $s=5$ m ($v=0$ ที่ $s=0$)



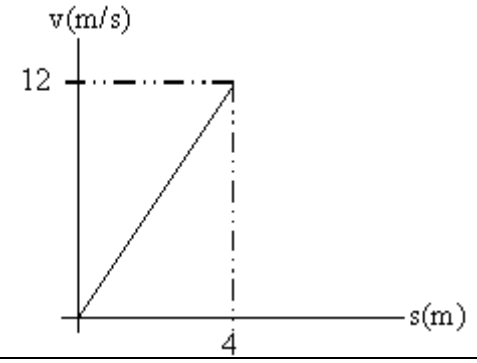
ก) 2.5 m/s

ข) 5 m/s

ค) 7.5 m/s

ง) 10 m/s

ข้อที่ 9 อนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ $v-s$ ที่กำหนดให้ จงหาอัตราเร่งของอนุภาคนี้เมื่อ $s=2$ m



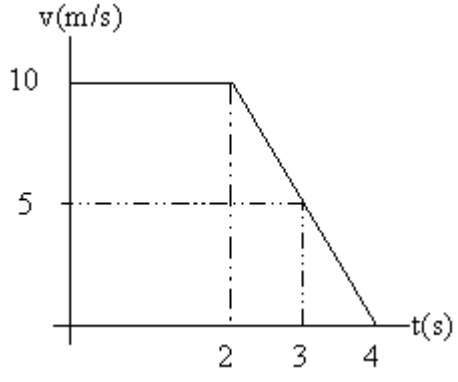
ก) 9 m/s^2

ข) 12 m/s^2

ค) 16 m/s^2

ง) 18 m/s^2]

ข้อที่ 10 อนุภาคอันหนึ่งมีการเคลื่อนที่ดังแสดงในกราฟ $v-t$ ที่กำหนดให้ จงหาอัตราเร่งของอนุภาคนี้เมื่อ $t=3$ s



ก) -2 m/s^2

ข) -3 m/s^2

ค) -4 m/s^2

[ง) -5 m/s^2]

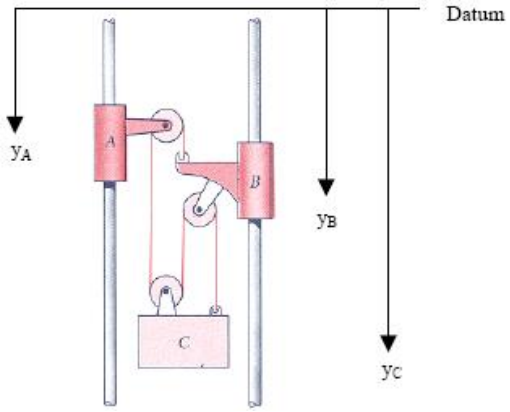
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 1/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 ปลอกเลื่อน A เริ่มเคลื่อนที่ลงจากตำแหน่งสูงสุด (t = 0) ด้วยความเร่งคงที่ 3.6 in/s^2 และปลอกเลื่อน B เคลื่อนที่ลงด้วยความเร็วคงที่ 17 in/s

จงหา ก) เวลาที่ทำให้ความเร็วของกล่อง C มีค่าเป็น 0

ข) ตำแหน่งและทิศทางการเคลื่อนที่ของกล่อง C



วิธีทำ

เขียนสมการความยาวของเส้นเชือก

$$L = (y_B - y_A) + (y_c - y_A) + 2(y_c - y_B) + Const$$
$$= -2y_A - y_B + 3y_C + Const$$

แทนค่าลงในสมการ

$$0 = -2v_A - v_B + 3v_C$$
$$0 = -2a_A - a_B + 3a_C$$

จากการแก้สมการจะได้ความเร่งของกล่อง C

$$a_C = -2.4 \ \frac{in}{s^2}$$

หาเวลาที่ในขณะที่กล่อง C มีความเร็วเป็น 0 จาก

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} \Rightarrow a_C\,dt = dv_C \Rightarrow \int_0^t -2.4\,dt = \int_{v_{C0}}^{v_C} dv_C \Rightarrow -2.4\,t = v_C - v_{C0}$$

จากการแทนค่าจะได้ $t_{VC=0}$ = 2.22 s. และจะได้ระยะทางที่กล่อง C เคลื่อนที่ได้เท่ากับ 5.93 in.

ตอบ

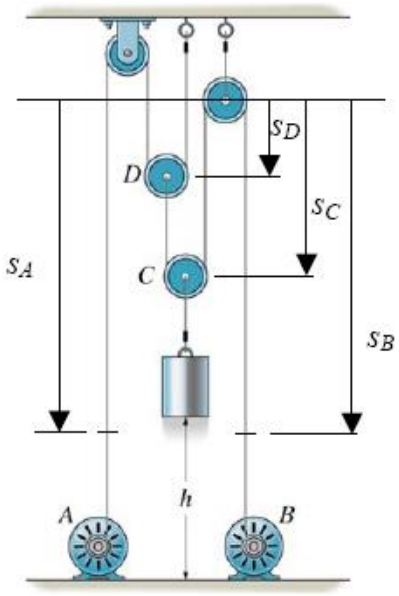
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 2/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. จงคำนวณหาเวลาและความเร็วของวัตถุที่ห้อยติดกับรอก C เมื่อวัตถุนั้นเคลื่อนที่ขึ้นสูงจากพื้นได้ระยะความสูง $h = 4\,m$ ถ้าความเร่งของสายเคเบิ้ลทั้งสองด้าน เท่ากับ $a = (0.2t)\ m/s^2$

ตอบ. $t = 5.4288\ s$, $v = 2.2104\ m/s \uparrow$

วิธีทำ



สมการความยาวของเชือกเส้นที่ 1 (L_1) คือ

$S_A + 2S_D = L_1 = \text{Const.}$

และสมการความยาวของเชือกเส้นที่ 2(L_2) คือ

$S_B + S_C + (S_C - S_D) = L_2 = \text{Const.}$

จากความสัมพันธ์ดังกล่าวจะได้สมการความเร็วดังนี้

คือ $V_A + 2V_D = 0$ ....(1)

$2V_C - V_D = 0$ .....(2)

$a_A + 2a_D = 0$ .....(3)

$2a_C - a_D + a_B = 0$ .....(4)

แก้สมการที่ (3) และ (4) จะได้ $a_A + 4a_C + 2a_B = 0$

ดังนั้น $a_C = a_C = \dfrac{-a_A - 2a_B}{4} = \dfrac{-0.2t - 2(0.2t)}{4} = \dfrac{-0.6t}{4} = 0.15t \uparrow$

หาสมการความเร็วของรอก C (V_C) จาก

$$\int dv_C = \int_{t_1}^{t_2} a_C dt = \int dv_C = \int_{t_1}^{t_2} (0.15t)dt$$

จะได้ $v_C = 0.075t^2$ และ $v_C = \dfrac{dh}{dt}$

จะได้ $h = 0.025t^3 = 4\ m.$

แก้สมการจะได้ $t = (160)^{1/3} = 5.4288\ s.$

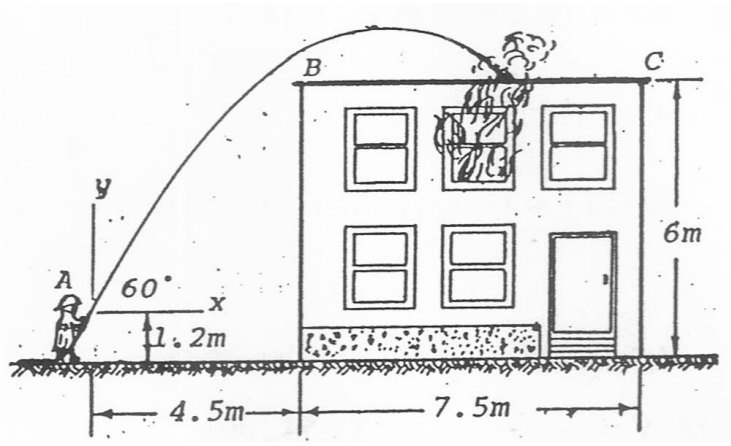
หาความเร็วของ Block จาก $V_C = 0.075t^2 = 0.076(5.4288)^2 = 2.2104\ m/s \uparrow$

นั่นคือ Block จะเคลื่อนที่ขึ้นได้ระดับความสูง $h = 4\,m.$ เมื่อเวลา $t = 5.4288\ s$ ด้วยความเร่ง a_A และ a_B เท่ากับ $(0.2t)\ m/s^2$ ความเร็วของ Block จะมีค่าเท่ากับ $2.2104\ m/s$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 3/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ความเร็วของน้ำที่ฉีดออกจากหัวฉีดที่จุด A มีค่าเท่ากับ 1.2 m/s ทำมุม 60^o กับแนวราบ จงหาตำแหน่งที่ลำน้ำกระทบหลังคา ให้ตรวจสอบด้วยว่า ลำน้ำนี้พ้นขอบหลังคา B หรือไม่ และจงหาความเร็วที่น้อยที่สุดและความเร็วที่มากที่สุด ที่ทำให้ลำน้ำนี้กระทบหลังคา



วิธีทำ : กำหนดแกน x - y ดังรูป

ดังนั้น $a_x = 0$, $a_y = -9.81\ m/s^2$

ในแนวแกน x $\Rightarrow$ $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ $s = (12\cos 60)\,t + \frac{1}{2}(0)t^2$ ...(1)

ในแนวแกน y $\Rightarrow$ $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ $(6-12) = (12\sin 60)\,t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$ ...(2)

จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้ $t = 0.68$, $t = 1.44s$

แทนค่า $t = 1.44s$ ลงในสมการที่ (1)

$\Rightarrow$ $s_X = (12\cos 60)(1.44) = 8.65$ m

ลำน้ำจะกระทบหลังคาที่จุด D ซึ่งอยู่ห่างจากหลังคา $B = 8.65 - 4.5 = 4.15$ m

และแทนค่า $t = 0.68s$ ลงในสมการที่ (1)

$\Rightarrow$ $s_X = (12\cos 60)(0.68) = 4.08$ m

ลำน้ำจะกระทบหลังคาที่จุด D ซึ่งอยู่ห่างจากหลังคา $B = 8.65 - 4.5 = 4.15$ m

ดังนั้น แสดงว่า ลำน้ำนี้จะพ้นขอบหลังคาที่ B เมื่อใช้ความเร็วน้อยที่สุด เพื่อให้ลำน้ำกระทบหลังคาที่ B พอดี

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 3/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ในแนวแกน x $\Rightarrow$ $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ $4.5 = (v_1 \cos 60)\,t + \frac{1}{2}(0)t^2$ ...(1)

ในแนวแกน y $\Rightarrow$ $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ $(6-12) = (v_1 \sin 60)\,t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$ ...(2)

แทนค่า v_1 จะได้

$$4.8 = 4.5\tan 60^o - 4.905t^2 \Rightarrow t = 0.78 \text{ s}$$

ดังนั้น ความเร็วน้อยที่สุด $v = \frac{4.5}{0.78\cos 60} = 11.54$ m/s

เมื่อใช้ความเร็วมากที่สุด เพื่อให้ลำน้ำกระทบหลังคาที่ C พอดี

ในแนวแกน x $\Rightarrow$ $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ $12 = (v_1 \cos 60)\,t + \frac{1}{2}(0)t^2$ ...(1)

ในแนวแกน y $\Rightarrow$ $s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ $6-1.2 = (v_1 \sin 60)\,t + \frac{1}{2}(-9.81)t^2$ ...(2)

แทนค่า v_1 จะได้

$$4.8 = 12\tan 60^o - 4.905t^2 \Rightarrow t = 1.81 \text{ s}$$

นั่นคือ ความเร็วของลำน้ำที่มากที่สุด

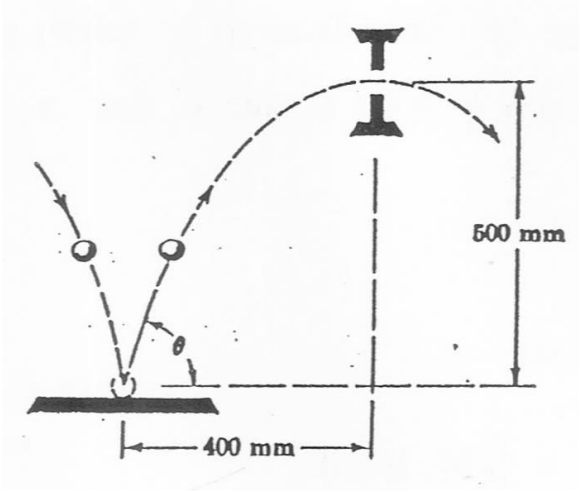
$$v = \frac{12}{1.81\cos 60^o} = 13.26 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 3 เลขหน้า 3/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4. ลูกบอลกระทบพื้นและกระดอนขึ้นผ่านช่องเปิดตามรูป จงหาค่ามุม θ และความเร็วของลูกบอลในขณะที่ผ่านช่องเปิดดังกล่าว

ตอบ. $\theta = 68.2^{o}$, $v = 1.25$ m/s



วิธีทำ : จากสมการ $h = \dfrac{u^2 \sin^2\theta}{2g}$ และ $s = \dfrac{u^2 \sin 2\theta}{2g}$

ดังนั้น

$$\frac{h}{s} = \frac{\sin^2\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{2}\tan\theta$$

หามุม θ จาก

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2h}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad \theta = 68.2^{o}$$ **ตอบ**

หาความเร็วของลูกบอลขณะที่ผ่านช่อง

$$u^2 = \frac{2gh}{\sin^2 h} = \frac{2 \times 9.81 \times 0.5}{\sin^2(68.2)} = 11.38 \quad \Rightarrow \quad u = 3.37 \text{ m/s}$$

$$v = u\cos\theta = \text{const.} = 3.37\cos(68.2) = 1.25 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

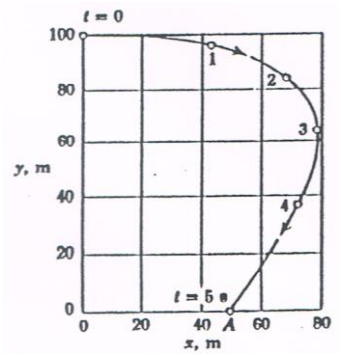
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 1/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : การเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งของอนุภาคเป็นไปตามสมการ $v_x = 50-16t$ และ $v_x = 50-16t$ $y = 100 - 4t^2$ ที่เวลา $t=0\,s$, $x = 0$ จงเขียนทางเดินของอนุภาคและให้หาความเร็วและความเร่งของอนุภาคที่ตำแหน่ง $y = 0$

หลักการวิเคราะห์ :

แยกพิจารณาในแนวแกน x และ y โดยจะต้องหาค่า x และค่า y ในเทอมของ t ซึ่งสามารถพล๊อตค่า x และ y ที่เวลา t ต่าง ๆ หาค่า v_x และ v_y และ a_x และ a_y ในเทอมของ t แล้ว แทนค่า t ที่ตำแหน่ง $y = 0$



การคำนวณ : จากสมการ

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad dx = v_x dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_o^x dx = \int_0^t (50-16t)\,dt$$

$$\Rightarrow \quad x = 50t - 8t^2 \ \text{m} \qquad ...(1)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(50-16t) = -16 \ \text{m/s}^2 \qquad ...(2)$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(100-4t^2) = -8t \ \text{m/s} \qquad ...(3)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}(-8t) = -8 \ \text{m/s}^2 \qquad ...(4)$$

เนื่องจาก $x = 50t - 8t^2$ และ $y = 100 - 4t^2$ ดังนั้นจะสามารถพล๊อตค่า x และ y ได้เมื่อ $t = 0, 1, 2, 3, 4$ และ $5s$ ดังแสดงในรูป

ถ้าต้องการหาความเร็วและความเร่งที่ตำแหน่ง $y = 0$ ดังนั้นต้องการหา t ที่ $y = 0$

จาก $y = 100 - 4t^2$

ดังนั้น $0 = 100 - 4t^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{100}{4} = 25$

$$\Rightarrow \quad t = 5 \ \text{s}$$

ที่ $t = 5$ s $\Rightarrow$ $v_x = 50 - 16(5) = -30$ m/s

ที่ $t = 5$ s $\Rightarrow$ $v_y = -8t = (-8)(5) = -40$ m/s

นั่นคือ

$$v = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \ \text{m/s}$$

และ $a = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} = 17.9 \ \text{m/s}^2$ **ตอบ**

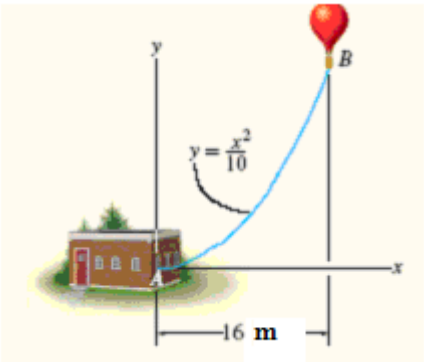
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 2/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 ถ้าตำแหน่งการเคลื่อนที่ของลูกบอลลูน ถูกกำหนดโดยสมการ $x = (8t)$ และ $y = x^2/10$ จงหา ก) ระยะทางระหว่างลูกบอลลูนกับตำแหน่ง A (เส้นตรง) เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

ข) ขนาดและทิศทางของความเร็วของลูกบอลลูน เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

และหามุมระหว่างแกน y และ x จากสมการดังต่อไปนี้



วิธีทำ

ก) หาระยะทางระหว่างลูกบอลลูนกับตำแหน่ง A (เส้นตรง) เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที

$$v_x = \tan^{-1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6^{o}$$

ที่เวลา $t = 2$ s จะได้ $x = 8(2) = 16$ m.

$$y = \frac{16^2}{10} = 25.6 \text{ m.}$$

ดังนั้นระยะทางที่วัดจาก A ไป B (เส้นตรง) มีค่าเท่ากับ

$$r = \sqrt{16^2 + 25.6^2} = 30.2 \text{ m.}$$ **ตอบ.**

ข) หาขนาดและทิศทางของความเร็วของลูกบอลลูน เมื่อเวลาผ่านไป 2 วินาที จาก

$$v_x = \overset{o}{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d(8t)}{dt} = 8 \text{ m/s}$$

$$v_y = \overset{o}{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d(x^2/10)}{dt} = 2x\overset{o}{x}/10 = [2 \times 16 \times 8]/10 \text{ m/s} = 25.6 \text{ m/s}$$

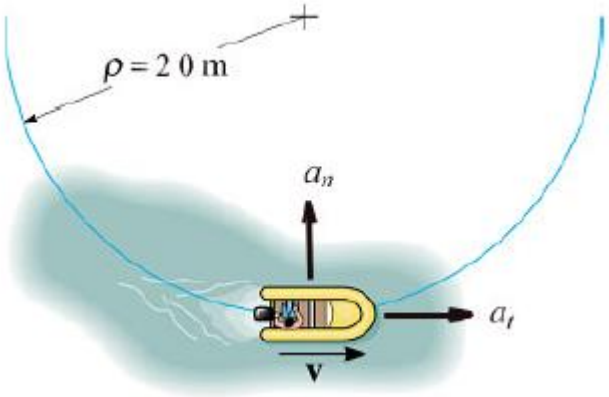
และหามุมระหว่างแกน y และ x จากสมการดังต่อไปนี้

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6^{o}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 3/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 เรือลำหนึ่ง เคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งดังแสดงในภาพ จงคำนวณหาความเร่งของเรือลำนี้ ถ้ารัศมีความโค้งเท่ากับ 20 m. และอัตราเร็วเท่ากับ 5 m/s. (คงที่) และอัตราเร่งในแนวแกน t เท่ากับ 2 m/s^2



วิธีทำ

จากโจทย์

- ความเร่งในแนวแกน t เท่ากับ 2 m/s^2 (a_t)
- รัศมีความโค้งเท่ากับ 20 m. (ρ)

และจาก

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

โดย

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{5^2}{20} = 1.25 \ m/s^2$$

$$a_t = \dot{v} = 2 \ m/s^2$$

แทนค่าลงในสมการ

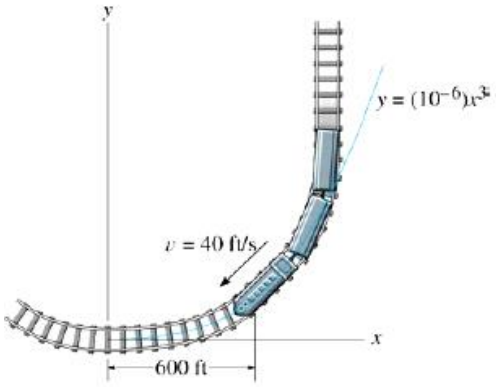
$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{(2)^2 + (1.25)^2} = 2.3585 \ m/s^2$$

ดังนั้น ความเร่งของเรือลำนี้ จึงมีค่าเท่ากับ 2.358 m/s^2 **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 4/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 รถไฟขบวนหนึ่งวิ่งตามรางที่โค้งตามสมการ $y = (10^{-6})x^3$ จงคำนวณหาอัตราเร่งของรถไฟขบวนนี้ ถ้าที่ x = 600 ความเร็วของรถไฟจะเท่ากับ 40 ft/s (x และ y มีหน่วยเป็นฟุต)



วิธีทำ

จากสมการ $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

และจากโจทย์กำหนดให้ ความเร็วของรถไฟมีค่าคงที่เท่ากับ 40 ft/s นั่นหมายความว่า ความเร่งในแนวแกน t จะมีค่าเป็น 0 ($a_t = 0$ m/s^2) ซึ่งจะทำให้ ความเร่งของรถไฟขบวนนี้ เท่ากับความเร่งในแนวแกน n เท่านั้น

โดยหาอัตราเร่งในแนวแกน n จาก

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

เมื่อ $y = (10^{-6})x^3$ จะได้ $\frac{dy}{dx} = 3(10^{-6})x^2$ และ $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(10^{-6})x$

และที่ x = 600 ft. รัศมีความโค้งของรางรถไฟจะหาได้จาก

$$\rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$ แทนค่าลงในสมการจะได้ $\rho = \frac{\left[1+(3(10^{-6})x^2\right]^{3/2}}{\left|6(10^{-6})x\right|} = 855.7384$ ft.

ดังนั้น $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{40^2}{855.7384} = 1.8064$ ft/s^2

นั่นหมายความว่าอัตราเร่งของรถไฟขบวนนี้ เท่ากับ 1.8064 ft/s^2 **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 5/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5. อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่ตามสมการ $r = 4 + t^2$ และ $\theta = \frac{t^2}{2}$ เมื่อ r มีหน่วยเป็น m และ θ มีหน่วยเป็น rad จงหาความเร็ว $\vec{v}$ และความเร่ง $\vec{a}$ ของอนุภาคนี้เมื่อ $t = 2s$

หลักการวิเคราะห์ :

หาอนุพันธ์ของ r และ θ เทียบกับเวลา คือ $\dot{r}, \dot{\theta}, \ddot{r}$ และ $\ddot{\theta}$ จากนั้นจึงหาความเร็ว $\vec{v}$ และ $\vec{a}$ ในรูปของเวกเตอร์ที่เวลา $t = 2s$

การคำนวณ :

$r = 4 + t^2$	$\theta = \frac{t^2}{2}$
$\dot{r} = 2t$	$\dot{\theta} = t$
$\ddot{r} = 2$	$\ddot{\theta} = 1$

ที่ $t = 2s$ $\Rightarrow$ $\dot{r} = 4$, $\dot{\theta} = 2$, $\ddot{r} = 2$, $\ddot{\theta} = 1$

และ $\Rightarrow$ $v_\theta = r\dot{\theta} = (4+2^2)2 = 16$ m/s

$v_r = \dot{r} = 4$ m/s

ดังนั้น $\Rightarrow$ $\vec{v} = v_r\vec{r}_1 + v_\theta\vec{\theta}_1 = 4\vec{r}_1 + 16\vec{\theta}_1$ m/s **ตอบ**

และ

$\Rightarrow$ $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 2 - (4+2^2)2^2 = -30$ m/s^2

$\Rightarrow$ $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (4+2^2)1 + (2)(4)(2) = 24$ m/s^2

นั่นคือ

$\Rightarrow$ $\vec{a} = a_r\vec{r}_1 + a_\theta\vec{\theta}_1 = (-30)(\vec{r}_1) + (24)(\vec{\theta}_1)$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 4 เลขหน้า 6/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 6. อนุภาคอันหนึ่งเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้งในแกน $r-\theta$ ในขณะนั้นถ้า $\theta=\frac{5\pi}{4}$ ความเร่งในแนว θ เท่ากับ 16 mm/s^2, $r=5\,mm, \ddot{r}=6\,mm/s^2, \dot{\theta}=0.5$ rad/s , $\ddot{\theta}=4$ rad/s จงคำนวณหาขนาดของความเร็วของอนุภาคในขณะนั้น

หลักการวิเคราะห์ :

ข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้สามารถหาค่า $\dot{r}$ ได้ โดยใช้สมการความเร่งในแนวแกน θ คือ $a_r = r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$ จากนั้นก็หาความเร็วรวมได้ เมื่อ $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$

การคำนวณ :

ความเร่งในแนวแกน θ เท่ากับ 16 mm/s^2 ดังนั้น

$$\Rightarrow \quad a_\theta = 16 = r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad 16 = 5(4) + 2(\dot{r})(0.5)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = -4 \text{ mm/s}$$

ดังนั้น $\Rightarrow \quad v_r = \dot{r} = -4$ mm/s

$$\Rightarrow \quad v_\theta = r\dot{\theta} = 5(0.5) = 2.5 \text{ mm/s}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{(-4)^2+(2.5)^2} = 4.72 \text{ mm/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 7/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 7. ในขณะนั้นแขนพร้อมร่อง หมุนด้วยอัตราเร็ว $N = 80$ rev/min และหมุนช้าลงด้วยอัตรา 280 rev/min/s ระยะ r ในขณะนั้นเท่ากับ 250 mm และมีระยะลดลงด้วยอัตราคงที่ 300 mm/s จงหา $\vec{a}$ ในรูปของเวกเตอร์ในขณะนั้น

หลักการวิเคราะห์ :

แปลงค่า $\dot{\theta}$ และ $\ddot{\theta}$ ที่โจทย์กำหนดมาให้ ให้อยู่ในรูปของ rad/s และ rad/s^2 ตามลำดับ และใช้ข้อมูลอื่น ๆ หา a_r และ a_θ ได้ ซึ่งจะสามารถหา $\vec{a}$ ได้

การคำนวณ :

ข้อมูลที่โจทย์กำหนดมาให้ ดังนี้

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = 80\left(\frac{2\pi}{60}\right) = 8.38 \text{ rad/s}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = -280\left(\frac{2\pi}{60}\right) = -29.3 \text{ rad/s (หมุนช้าลง)}$$

และ $\Rightarrow \quad r = 250 \text{ mm} = 0.25 \text{ m}$

$\Rightarrow \quad \dot{r} = -300 \text{ mm/s} = -0.3 \text{ m/s}$ (ระยะ r ลดลง)

$\Rightarrow \quad \dot{r} = 0$

ดังนั้น

$$\Rightarrow \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - (0.25)(8.38)^2 = -17.55 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.25(-29.3) + 2(-0.3)(8.38) = -12.36 \text{ m/s}^2$$

นั่นคือ

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = a_r\vec{r}_1 + a_\theta\vec{\theta}_1 = (-17.55)(\vec{r}_1) + (-12.36)(\vec{\theta}_1)$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 4 เลขหน้า 8/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 8. แขน OA หมุนตามสมการ $\theta = 0.2t + 0.02t^3$ ในขณะเดียวกันเกลียวจะหมุน ซึ่งทำให้ตัวเลื่อน B เคลื่อนที่ไปตามเกลียวด้วยสมการ $r = 0.2 + 0.04t^2$ จงหาความความเร่งของตัวเลื่อนในขณะที่เวลา $t = 3s$

วิธีทำ : ในขณะที่เวลา $t = 3s$

$$\Rightarrow \quad r = 0.2 + 0.004t^2$$

$$\Rightarrow \quad r = 0.2 + 0.004(3)^2 = 0.56 \text{ m}$$

หาอนุพันธ์ของ r เทียบกับเวลาจะได้ $\Rightarrow \quad \dot{r} = 0.08t \, , \ddot{r} = 0.08$

ดังนั้นที่เวลา $t = 3s$ นั้น จะได้

$\Rightarrow r = 0.2 + 0.004(3)^2 = 0.56$ m	$\Rightarrow \quad \theta = 0.2t + 0.02t^3$
$\Rightarrow \dot{r} = 0.08(3) = 0.24$ m/s	$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = 0.2 + 0.6t^2$
$\Rightarrow \ddot{r} = 0.08$ m/s^2	$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0.12t$

หามุม θ ที่เวลา $t = 3s$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0.2t + 0.02t^3$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 0.2(3) + 0.2(3)^3$$

$$\Rightarrow \quad \theta = 1.14 \text{ rad/s} = 1.14\left(\frac{180}{\pi}\right) = 65.3^o$$

หามุม $\dot{\theta}$ ที่เวลา $t = 3s$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = 0.2 + 0.6t^2$$

$$\Rightarrow \quad \dot{\theta} = 0.2 + 0.6(3)^2 = 0.74 \text{ rad/s}$$

หามุม $\ddot{\theta}$ ที่เวลา $t = 3s$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} = 0.12t = 0.12(3) = 0.36 \text{ rad/s}^2$$

ดังนั้น

$$\Rightarrow \quad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.08 - 0.56(0.74)^2 = -0.227 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.56(0.36) + 2(-0.24)(074) = 0.557 \text{ m/s}^2$$

นั่นคือ

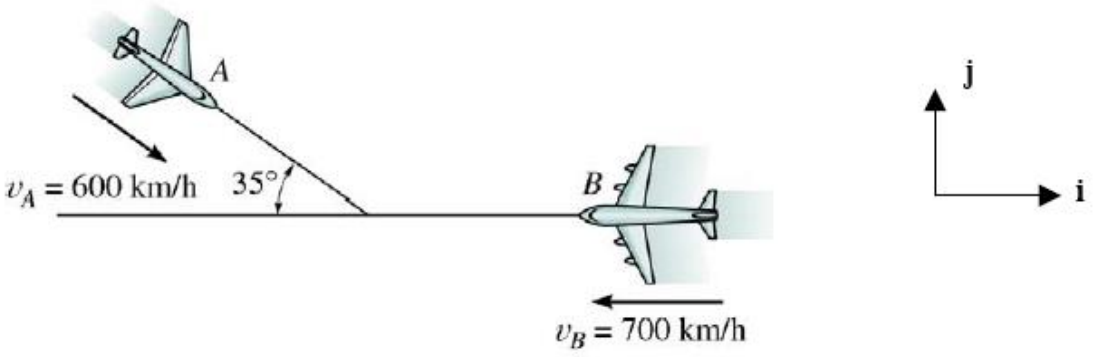
$$\Rightarrow \quad \vec{a} = a_r\vec{r}_1 + a_\theta\vec{\theta}_1 = (-0.277)(\vec{r}_1) + (0.557)(\vec{\theta}_1)$$

$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{(-0.227)^2 + (0.557)^2} = 0.601 \text{ m/s}^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 เครื่องบิน A และ B กำลังบินอยู่ในทิศทางดังแสดงในภาพ ถ้าในขณะนั้นเครื่องบิน A มีความเร็ว V_A = 600 km/h และ เครื่องบิน B มีความเร็ว V_B = 700 km/h จงหาความเร็วสัมพัทธ์ของเครื่องบิน B ถ้าผู้มองอยู่บนเครื่องบิน A ($V_{B/A}$)



วิธีทำ

จากการบินของเครื่องบินทั้งสองลำ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ได้ดังนี้

$V_A = 600 \cos 35\, i - 600 \sin 35\, j$

$V_B = -700\, i$

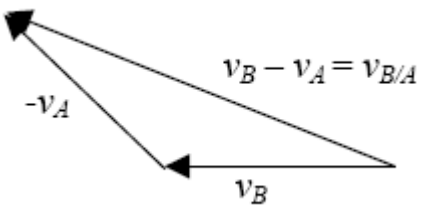
และจาก $V_{B/A} = V_B - V_A$

$= -700i - 600 \cos 35\, I + 600 \sin 35\, j$

$= -1191.5\, i + 344.1459\, j$

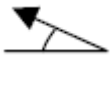
$= \sqrt{(-1191.5)^2 + (344.1459)^2}$

$= 1240.2$ km/h



หามุม θ จาก

$$\tan\theta = \frac{344.1459}{-1191.5} = 163.9^{\circ}$$



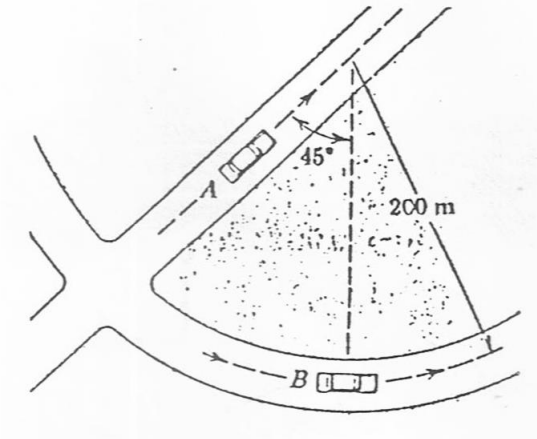
นั่นคือความเร็วสัมพัทธ์ $V_{B/A}$ เท่ากับ 1240.2 km/h และทำมุม 163.9° **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 5 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 : ในขณะตำแหน่งดังแสดงในภาพ รถยนต์ A มีความเร่งในทิศทางการเคลื่อนที่ รถยนต์ B แล่นด้วยอัตราเร็ว 72 km/h และกำลังเร่งเพิ่มขึ้น ถ้าความเร่งของ B ซึ่งสังเกตจาก A มีค่าเป็นศูนย์ในขณะนั้น จงหาความเร่งของ A และอัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วของ B

ตอบ. ($a_A = 2.83 \ \ m/s^2$, $\dot{v}_B = 2 \ m/s^2$)



หลักการวิเคราะห์ :

เขียนเวกเตอร์แสดงความสัมพันธ์ของความเร่ง $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$ ในเมื่อ $\vec{a}_{B/A} = 0$ ดังนั้น $\vec{a}_B = \vec{a}_A$

โดยที่ $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$

การคำนวณ : $\Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

$\Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + 0$

$\Rightarrow \quad v_B = 72 \ km/h = \dfrac{72}{3.6} = 20 \ \ m/s$

$\Rightarrow \quad (\vec{a}_B)_n = \dfrac{v_B^2}{\rho} = \dfrac{20^2}{200} = 2 \ m/s^2$

จากรูปแสดงเวกเตอร์ของความเร่ง

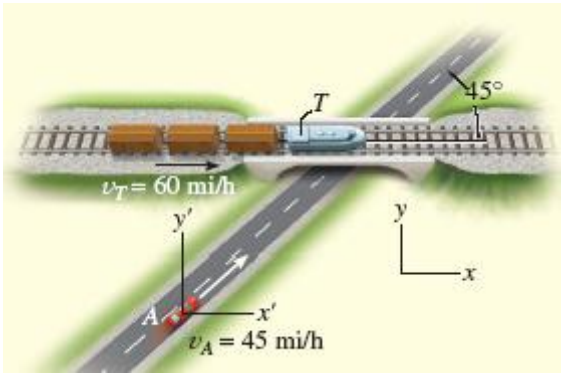
อัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วของ B = $\dot{v}_B = (a_B)_t = 2 \ m/s^2$

และ $\vec{a}_B = \vec{a}_A = \sqrt{(a_B)_t^2 + (a_B)_n^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2.83 \ m/s^2$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 5 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 รถไฟขบวนหนึ่ง เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่ 60 mi/h โดยที่รางรถไฟอยู่เหนือถนนที่มีรถยนต์อีกคันหนึ่ง วิ่งมาด้วยอัตราเร็ว 45 mi/h ตามทิศทาง ดังแสดงในภาพ ถ้าผู้โดยสารที่อยู่ในรถยนต์มองผู้โดยสารที่อยู่บนรถไฟ จงหาขนาดของความเร็วสัมพัทธ์ ($v_{T/A}$)



วิธีทำ

จากสมการการสัมพัทธ์

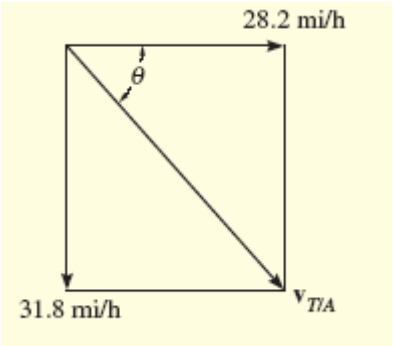
$$V_T = V_A + V_{T/A}$$

นั่นคือ $60i = (45 \cos 45\, i) + (45 \sin 45\, j) + V_{T/A}$

ดังนั้น $V_{T/A} = (28.2)i - (31.8)j$

$$= \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2}$$

$$= 42.5 \text{ mi/h} \quad \text{ตอบ}$$



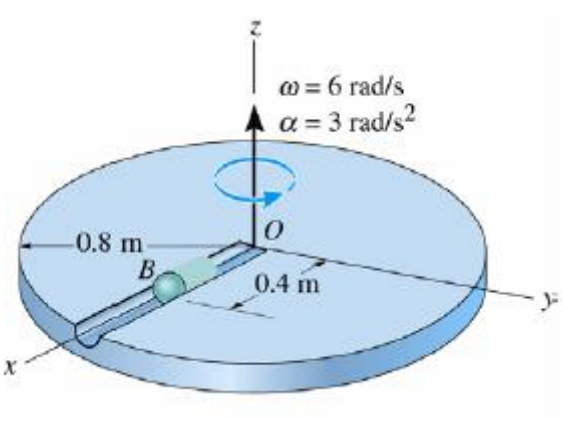
และหามุม θ จาก

$$\tan\theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2} = 48.5^{\circ}$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 5 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 ลูกบอลวิ่งอยู่ในร่องบนจานที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega = 6$ rad/s และมีความเร่งเชิงมุม $\alpha = 3$ rad/s^2 โดยในขณะที่ลูกบอลนี้ห่างจากจุด O เป็นระยะทางเท่ากับ 0.4 m ลูกบอลนี้มีความเร็วเท่ากับ 0.6 m/s และมีความเร่งเท่ากับ 0.15 m/s^2 ในทิศทางดังแสดงในภาพ จงหาความเร็วและความเร่งของลูกบอลนี้



วิธีทำ

จากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบ Rotating Axes

สมการความเร็วสัมพัทธ์ $\vec{v}_A = \vec{v}_B + (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \vec{v}_{rel}$ …(1)

สมการความเร่งสัมพัทธ์ $\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\dot{\vec{\omega}} \times r) + (\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times r)) + (2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}) + \vec{a}_{rel}$ …(2)

เมื่อ

$v_0 = 0$

$a_0 = 0$

$\omega = 6\,\vec{k}$ rad/s

$\dot{\omega} = 3\,\vec{k}$ rad/s^2

$\vec{r}_{AC/O} = \vec{r}_{rel} = 0.4\,\vec{i}$ m

$(\vec{v}_{A/O})_{XYZ} = \vec{v}_{rel} = 0.6\,\vec{i}$ m/s

$(\vec{a}_{A/O})_{XYZ} = \vec{a}_{rel} = 0.15\,\vec{i}$ m/s^2

$a_{Cor} = (2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel})$

$= 2(6)\vec{k} \times (0.6\vec{i})$

$= 7.2\,\vec{j}$ m/s^2

จากการแทนค่าลงในสมการที่ (1) และ (2) จะได้

$v_C = [\,0.6\vec{i} + 2.4\vec{j}\,]$ m/s

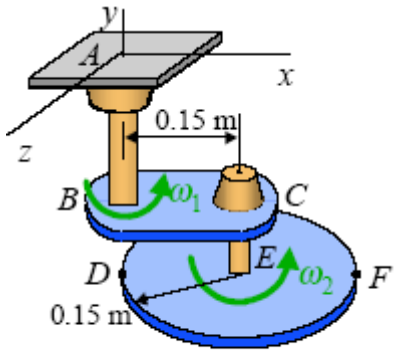
$a_C = [\,-14.2\vec{i} + 8.4\vec{j}\,]$ m/s^2 **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 5 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5 แผ่นจานกลมรัศมี 0.15 m หมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ (ω_2 = constant)

ถ้า $\omega_1 = \omega_2 = 3$ rad/s



$\alpha = 0$

จงหา

ก) ความเร็ว และความเร่งของจุด D

ข) ความเร็ว และความเร่งของจุด F

วิธีทำ หาความเร็วเชิงมุมของแผ่นจานกลมที่หมุนรอบเพลา AB จาก

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 = 3j + 3j = 6j \text{ rad/s}$$

ก) พิจารณาที่จุด D

$$V_D = V_C + (\omega \times r_{D/E})$$

$$= (3j) \times (0.15i) + (6j) \times (-0.15i) = 0.45\,k \text{ m/s}$$

และจากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบ Rotating Axis

$$a_D = a_C + (\alpha \times r_{D/E}) + [\omega \times (\omega \times r_{D/E})]$$

$$a_D = \omega_1 + (\omega_1 \times r_{C/B}) + [\omega \times (\omega \times r_{D/E})]$$

$$a_D = (3j) \times (3j \times 0.15i) + [6j \times (6j \times (-0.15i)]$$

$$a_D = -1.35i + 5.4i = 4.05i \text{ m/s}^2$$ **ตอบ**

ข) พิจารณาที่จุด F

$$V_F = V_C + (\omega \times r_{F/E})$$

$$= (3j) \times (0.15i) + (6j) \times (0.15i) = -1.5\,k \text{ m/s}$$

และจากสมการการเคลื่อนที่สัมพัทธ์แบบ Rotating Axis

$$a_F = a_C + (\alpha \times r_{F/E}) + [\omega \times (\omega \times r_{F/E})]$$

$$a_F = \omega_1 + (\omega_1 \times r_{C/B}) + [\omega \times (\omega \times r_{F/E})]$$

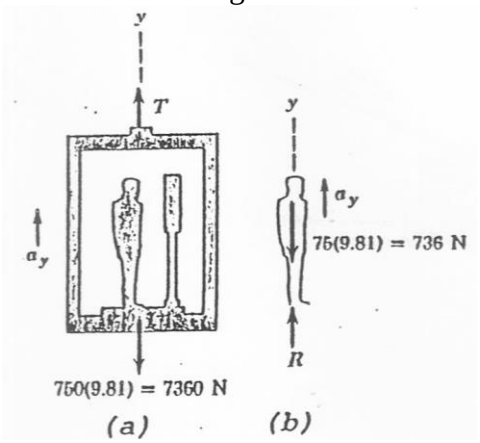
$$a_D = (3j) \times (3j \times 0.15i) + [6j \times (6j \times (0.15i)]$$

$$a_D = -1.35i - 5.4i = -6.75i \text{ m/s}^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 1/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 ชายคนหนึ่งมีมวล 75 kg ยืนอยู่บนเครื่องชั่งสปริงในลิฟต์ ในช่วง 3 วินาทีแรกของการเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่ง ความตึงในสายเคเบิ้ลเท่ากับ 8,300 N จงอ่านค่า R ซึ่งอ่านได้จากหน้าปัทม์ของเครื่องชั่งในช่วงเวลาดังกล่าว และความเร็วของลิฟต์ เมื่อสิ้นสุดวินาทีที่ 3 กำหนดให้มวลของลิฟต์ชายคนดังกล่าวและเครื่องชั่งรวมกันเท่ากับ 750 kg



วิธีทำ : หลักการวิเคราะห์

ค่า R ซึ่งอ่านได้จากหน้าปัทม์ของเครื่องชั่งก็คือ แรงกระทำระหว่างคนกับตาชั่ง ซึ่งจะปรากฏใน FBD ของคน ค่าความเร่ง a_y จะหาได้จากการพิจารณาผังวัตถุอิสระของลิฟต์ คน และเครื่องชั่งรวมเป็นวัตถุเดียวกัน

การคำนวณ

พิจารณาผังวัตถุอิสระของลิฟต์ คน และเครื่องชั่งรวมกัน

จากสมการการเคลื่อนที่

$$\sum F_y = ma_y \qquad \Rightarrow \qquad 8{,}300 - 7{,}360 = 750a_y$$

$$a_y = 1.257\,\text{m/s}^2$$

พิจารณาผังวัตถุอิสระของคนซึ่งมีความเร่ง $a_y = 1.257\,\text{m/s}^2$

$$\sum F_y = ma_y \qquad \Rightarrow \qquad R - 736 = 75(1.257)$$

$$R = 830\ \text{N}$$ **ตอบ**

เนื่องจากแรงกระทำจากภายนอกคงที่ ดังนั้นความเร่ง a_y จึงคงที่ด้วย ความเร็วของลิฟต์เมื่อสิ้นสุดวินาทีที่ 3 คือ

$$\Rightarrow \qquad v = v_1 + at$$

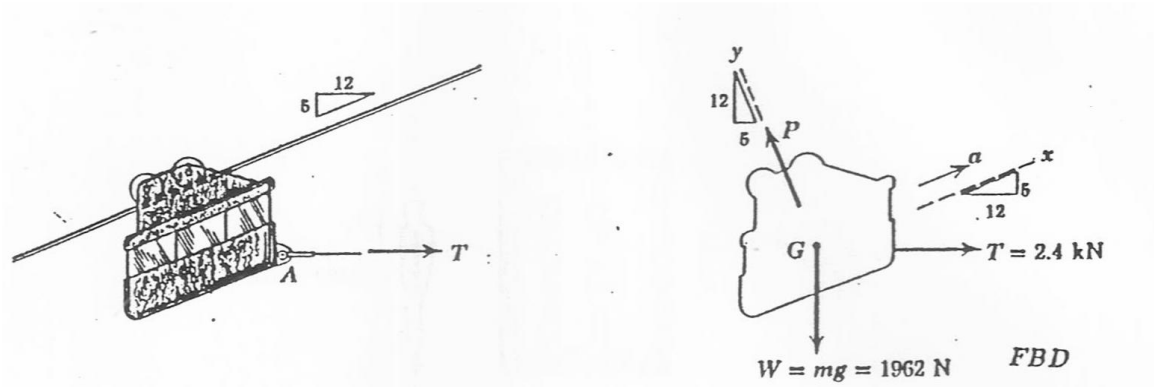
$$v = 0 + 1.257(3)$$

$$= 3.77\ \text{m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 2/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 รถกระเช้ามวล 200 kg เคลื่อนที่ไปตามสายเคเบิ้ลด้วยแรงดึง $T = 2.4$ kN จงหาความเร่งของกระเช้าและแรงดึง P ที่สายเคเบิ้ลกระทำต่อล้อเลื่อน



หลักการวิเคราะห์ :

รถกระเช้ามีการเคลื่อนที่ในแนวสายเคเบิ้ล ดังนั้นเมื่อกำหนดระบบแกน x - y โดยให้แกน x อยู่ในแนวสายเคเบิ้ล $a_x = a$ และ $a_y = 0$

การคำนวณ :

จากสมการการเคลื่อนที่

$$\sum F_y = ma_y \qquad \Rightarrow \qquad P - 2.4\left(\frac{5}{13}\right) - 1.962\left(\frac{12}{13}\right) = 0$$

$$P = 2.73 \text{ kN}$$

พิจารณาผังวัตถุอิสระของคนซึ่งมีความเร่ง $a_y = 1.257 \text{ m/s}^2$

$$\sum F_y = ma_x \qquad \Rightarrow \qquad 2{,}400\left(\frac{12}{13}\right) - 1.962\left(\frac{5}{13}\right) = 200\,ma$$

$$a = 7.30 \text{ m/s}^2$$ **ตอบ**

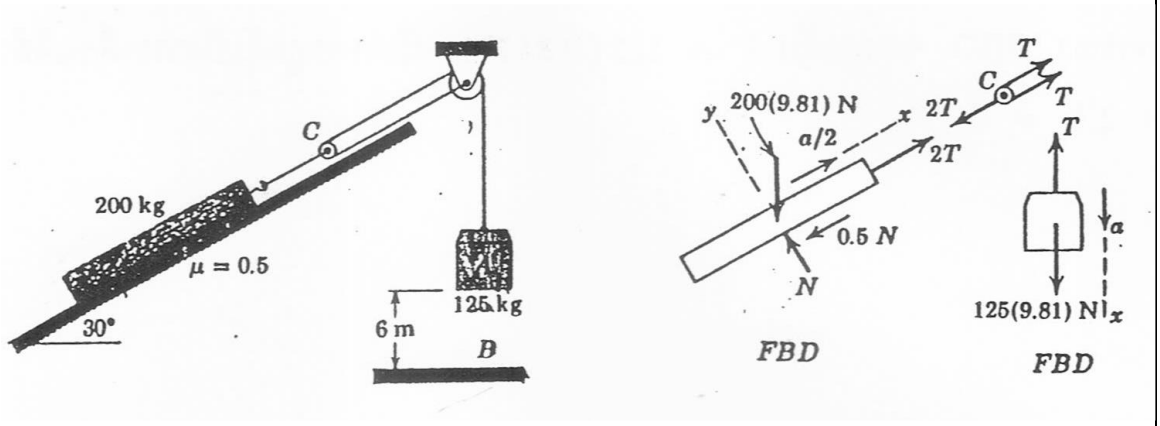
ข้อสังเกต :

ถ้ากำหนดระบบแกน x - y โดยให้แกน x อยู่ในแนวระดับ ความเร่งของรถกระเช้าจะประกอบด้วย a_x และ a_y โดย $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ การคำนวณจะต้องแก้สมการในแนวแกน x และ y พร้อมกัน

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 3/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ลูกตุ้มคอนกรีต A มวล 125 kg ถูกปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่งดังรูป ดึงท่อนซุงมวล 200 kg เคลื่อนที่ขึ้นตามแนวพื้นเอียง 30^o สัมประสิทธิ์ความเสียดทานจลน์ระหว่างท่อนซุงกับพื้นเอียงเท่ากับ 0.5 จงหาความเร็วของท่อนซุงขณะที่ลูกตุ้มกระทบพื้นที่ B



หลักการวิเคราะห์ :

เนื่องจากท่อนซุงผูกอยู่กับรอกเป็น C ดังนั้นท่อน ซุงจะเคลื่อนที่ได้ระยะเป็นครึ่งหนึ่งของลูกตุ้ม ความเร็วและความเร่งของท่อนซุงก็จะเป็นครึ่งหนึ่งของลูกตุ้มด้วย ถ้าสมมุติให้ลูกตุ้มมีความเร่ง a ท่อนซุงจะมีความเร่งตามแนวพื้นเอียงเป็น $\frac{a}{2}$

การคำนวณ : พิจารณา FBD

จากสมการการเคลื่อนที่

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - 200(9.81)\cos 30^o = 0$$

$$N = 1{,}699 \text{ N}$$

$$\sum F_y = ma_x \quad \Rightarrow \quad 2T - 0.5(1{,}699) - 200(9.81)\sin 30^o = \frac{200a}{2} \qquad ...(1)$$

พิจารณา FBD ของลูกตุ้ม

$$\sum F_y = ma_x \quad \Rightarrow \quad 125(9.81) - T = 125a \qquad ...(2)$$

$$N = 1{,}699 \text{ N}$$

จากสมการที่ (1) และ (2) จะได้

$a = 1.78 \text{ m/s}^2$, $T = 1{,}004$ N

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 4/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ลูกตุ้มเคลื่อนที่ได้ระยะทาง 6 m เมื่อกระทบพื้น B

จากสมการ $v^2 = u^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = 0 + 2(1.78)(6)$

$v_A = 4.62 \text{ m/s}$

ข้อสังเกต :

เมื่อพิจารณา FBD ของลูกตุ้ม $T \neq 125(9.81N)$ เนื่องจากลูกตุ้มมีการเคลื่อนที่ด้วยความเร่ง ดังนั้น $\sum F \neq 0$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 5/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : Collar มวล m เลื่อนไปตามเพลาในแนวดิ่งด้วยแรงกระทำ F ซึ่งมีขนาดคงที่ แต่มีการเปลี่ยนแปลงทิศทาง ถ้า $\theta = kt$ โดย k เป็นค่าคงที่ และ Collar เริ่มเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่ง $\theta = 0$ จงหาขนาดของแรง F ที่จะทำให้ Collar หยุดนิ่งเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$

หลักการวิเคราะห์ :

เมื่อพิจารณาจาก FBD ของ Collar มุม θ ที่เพิ่มขึ้น เมื่อเวลาผ่านไปจะทำให้แรงย่อย F_y ลดลง จึงเกิดความหน่วงขึ้นในแนวแกน y ส่วนในแนวราบไม่มีการเคลื่อนที่เกิดขึ้น $\sum F = 0$ จะได้

$$N = F\sin\theta$$

การคำนวณ : พิจารณา FBD ของ Collar

จากสมการการเคลื่อนที่

$$\sum F_y = ma_y \qquad \Rightarrow \qquad F\cos\theta - \mu N - mg = m\frac{dv}{dt}$$

$$(F\cos\theta Fc - \mu F\sin kt - mg)dt = m\int_0^v dv$$

$$\frac{F}{k}[\sin kt + \mu(\cos kt - 1)] - mgt = mv$$

สำหรับ $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2k}$ และ $v = 0$ ดังนั้น

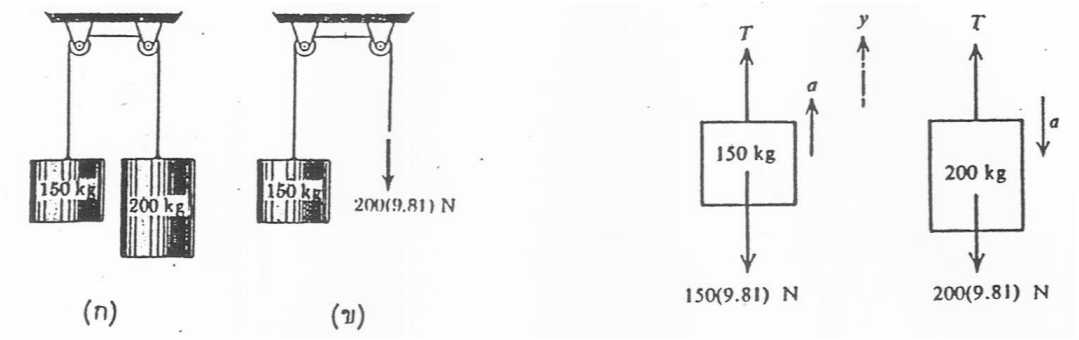
$$\frac{F}{k}[1 + \mu(0 - 1)] - \frac{mg\pi}{2k} = 0$$

$$F = \frac{mg\pi}{2k}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 6/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5 : จงหาความเร่งในแนวดิ่งของมวล 150 kg ทั้งสองกรณี เมื่อไม่คิดความเสียดทานของมวลและรอก



หลักการวิเคราะห์ :

ในกรณี (ก) มวล 150 kg จะเคลื่อนที่ขึ้น และมวล 200 kg จะเคลื่อนที่ลงด้วยความเร่งเท่ากัน ดังนั้นความตึงในเส้นเชือก จึงไม่เท่ากับน้ำหนักของมวล ส่วนในกรณี (ข) ความตึงในเส้นเชือก จะเท่ากับแรงดึงที่กระทำ

การคำนวณ :

กรณี (ก) พิจารณา FBD ของมวล 150 kg

จากสมการการเคลื่อนที่

$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad T - 150(9.81) = 150a$ ...(1)

พิจารณา FBD ของมวล 200 kg

$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad T - 200(9.81) = 200(-a)$ ...(2)

จากสมการ (1) และ (2) จะได้

$\Rightarrow \quad a = 1.40 \text{ m/s}^2$ **ตอบ**

กรณี (ข) พิจารณา FBD ของมวล 150 kg

จากสมการการเคลื่อนที่

$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad 200(9.81) - 150(9.81) = 150a$

$\Rightarrow \quad a = 3.27 \text{ m/s}^2$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 7/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 6 : อนุภาคมวล 3 kg เคลื่อนที่ในแนวราบตามแนวแกน y ด้วยความเร็ว 4 m/s เมื่อถูกกระทำด้วยแรงลัพธ์ $F_y = 5+2t^2$ เมื่อ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาความเร็วของอนุภาคเมื่อ $t = 3s$

หลักการวิเคราะห์ :

แรงลัพธ์ F_y มีค่าแปรผันตามเวลาที่ผ่านไป ดังนั้นความเร่งจึงแปรผันตามเวลาด้วย ให้ความเร่งในเทอมของเวลาแล้วจึงอินทิเกรตหาความเร็วที่เวลา $t = 3s$

การคำนวณ :

จากสมการการเคลื่อนที่

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad 5+2t^2 = 3a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{5}{3}+\frac{2}{3}t^2$$

$$dv = a\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_4^v dv = \int_0^3 (\frac{5}{3}+\frac{2}{3}t^2)dt$$

$$\Rightarrow \quad v - 4 = \frac{5}{3}t + \frac{2}{9}t^3\Big|_0^3$$

$v = 15$ m/s **ตอบ**

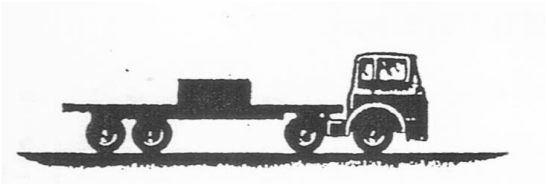
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 8/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 7 : สัมประสิทธิ์ความเสียดทาน ระหว่างพื้นรถกับห่อของเท่ากับ 0.30 จงหาระยะทางที่น้อยสุด s ที่จะหยุดรถบรรทุก จากอัตราเร็ว 70 km/h ด้วยความหน่วงคงที่ โดยไม่ทำให้ห่อของไถลไปข้างหน้า

หลักการวิเคราะห์ :

เมื่อรถหยุดด้วยความหน่วงคงที่ ห่อของจะมีความหน่วงเช่นเดียวกับรถด้วย (เมื่อไม่เกิดการไถล) แรงที่ทำให้ห่อของเกิดความหน่วงนี้คือ แรงเสียดทานระหว่างพื้นรถกับห่อของ ดังนั้นห่อของจึงไม่ไถลไปข้างหน้า หากแรงเสียดทาน $F \le \mu N$ เมื่อ N คือ แรงปฏิกิริยา ในแนวตั้งฉากกับพื้นรถที่กระทำต่อห่อของ ระยะทาง s ที่น้อยที่สุดที่ จะเกิดขึ้นเมื่อใช้ความหน่วงคงที่สูงสุดหรือแรงเสียดทานมีค่าสูงสุด คือ $F = \mu N$



การคำนวณ :

พิจารณา FBD ของห่อของ

$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad N - mg = 0$

$\Rightarrow \quad N = mg$

$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad -0.3mg = ma$

$\Rightarrow \quad a = -0.3g$

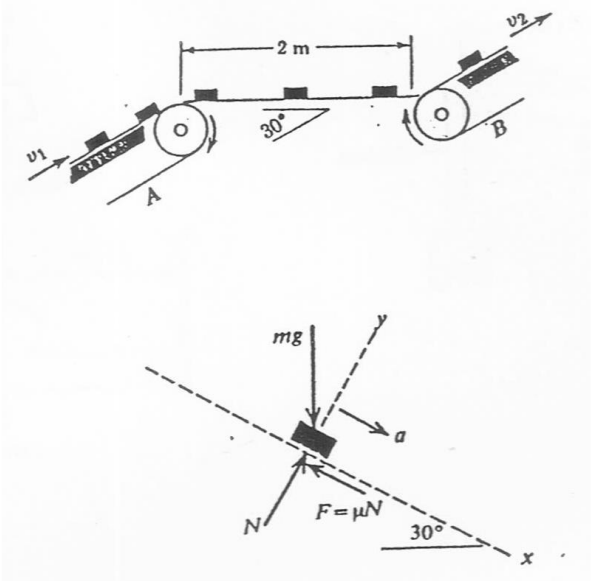
$v_2^2 = v_1^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad 0 = (\frac{70}{3.6})^2 + 2(-0.3g)\, s$

$\Rightarrow \quad s = 64.2 \text{ m}$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 6 เลขหน้า 9/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 8 : วัตถุชิ้นเล็ก ๆ ถูกส่งจากสายพาน A ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $v_1 = 0.4\,m/s$ ผ่านพื้นเอียงยาว 2 m ถ้าสายพาน B มีอัตราเร็ว $v_2 = 1\,m/s$ และวัตถุเคลื่อนที่จากพื้นเอียงสู่สายพาน B โดยไม่เกิดการไถล จงหาสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ ระหว่างวัตถุและพื้นเอียง



หลักการวิเคราะห์ :

วัตถุจะเคลื่อนที่สู่สายพาน B โดยไม่เกิดการไถล เมื่อมีความเร็วที่ปลายด้านล่างของพื้นเอียง หลังจากไถลลงมา เท่ากับความเร็วของสายพาน B คือ $v_2 = 1\,m/s$

พิจารณา FBD ของวัตถุ

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N - mg\cos 30^o = 0$

$\Rightarrow \quad N = 0.866mg$

$\sum F_y = ma_x \quad \Rightarrow \quad mg\sin 30^o - \mu(0.866mg) = ma$

$\Rightarrow \quad a = 9.81(0.5 - 0.866\mu)$

$vdv = ads \quad \Rightarrow \quad \int_{0.4}^{1} v\,dv = \int_{0}^{2} 9.81(0.5 - 0.866\mu)\,dx$

$\Rightarrow \quad a = 9.81(0.5 - 0.866\mu)$

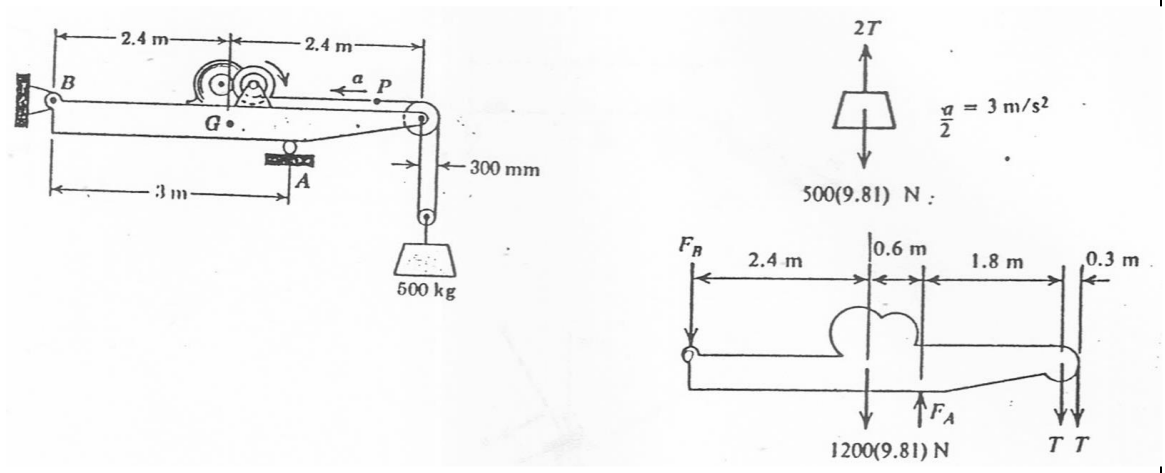
$\Rightarrow \quad 1^2 - (0.4)^2 = 2(9.81)(0.5 - 0.866\mu)(2)$

$\Rightarrow \quad \mu = 0.553$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 10/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 9 :คานและกลไกเครื่องกว้านมีมวลรวมเท่ากับ 1,200 kg มีจุดศูนย์กลางมวลที่ G ถ้าความเร่งเริ่มต้น ของจุด P บนสายเคเบิ้ลมีค่า $a = 6\ m/s^2$ จงหาแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ A



หลักการวิเคราะห์ :

มวล 500 kg ที่แขวนอยู่กับรอกนั้นจะมีความเร่งเป็นครึ่งหนึ่งของจุด P เมื่อพิจารณาผังวัตถุอิสระของมวล 500 kg จะได้แรงดึงในสายเคเบิ้ล จากนั้นจึงพิจารณา FBD ของคานและกลไกเครื่องกว้านเป็นมวลเดียวกัน

การคำนวณ

พิจารณา FBD ของมวล 500 kg

$\sum F = ma \quad \Rightarrow \quad 2T - 500(9.81) = 500(3)$

$\Rightarrow \quad T = 3{,}202.5\ N$

พิจารณา FBD ของคานและกลไกเครื่องกว้าน

$\sum M_B = 0$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

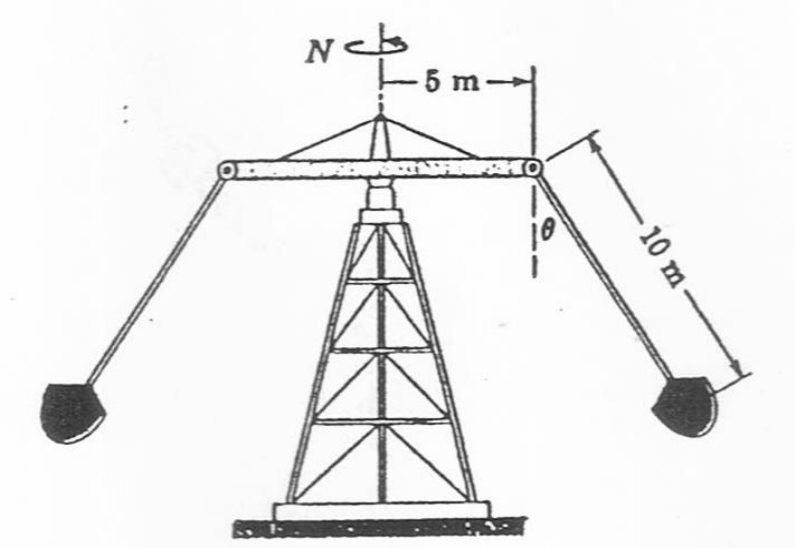
$\Rightarrow \quad F_A(0.3) - 1{,}200(9.81)(2.4) - 3{,}202.5(4.8+5.1) = 0$

$\Rightarrow \quad F_A = 19{,}986\ N$ หรือ $F_A = 19.986\ kN$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 11/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 10 : จงหาอัตราเร็วในการหมุน N เพื่อให้แขนของเครื่องเล่นกางออกเป็นมุม 60^o เมื่อไม่คิดมวลของแขนและถือว่า วัตถุเป็นอนุภาค



หลักการวิเคราะห์

วัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมในระนาบระดับ โดยมีความเร่งในแนวตั้งฉาก a_n รัศมีของวงกลม คือ $(5+10\sin\theta)$ m

การคำนวณ :

พิจารณาผังวัตถุอิสระของวัตถุขณะที่ $\theta = 60^o$

$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R\cos 60^o - mg = 0$

$\Rightarrow \quad R = \dfrac{mg}{\cos 60^o}$

$\sum F_n = ma_n \quad \Rightarrow \quad R\sin 60^o = m\omega^2 (5+10\sin 60^o)$

$mg\tan 60^o = m\omega^2 (5+10\sin 60^o)$

$\omega = 1.115$ rad/s

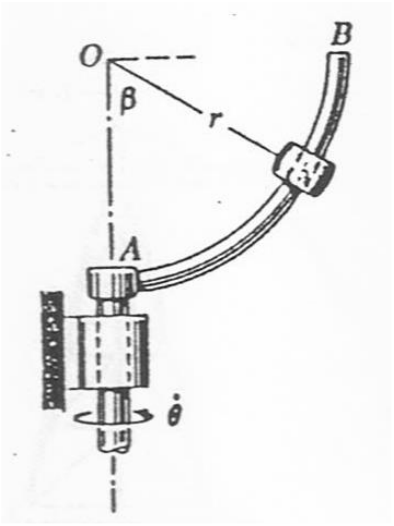
$N = \dfrac{1.115(60)}{2\pi}$

$N = 10.65$ rev/min **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 12/13

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 11 : ตัวเลื่อนเล็ก ๆ เคลื่อนที่ได้อิสระ ไปตามราวโค้งวงกลม AB โดยไม่มีความเสียดทาน ถ้าราวโค้งนี้หมุนรอบแกนดิ่ง OA ด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ $\dot{\theta}$ จงหามุม β สำหรับตำแหน่งเสถียรของตัวเลื่อน

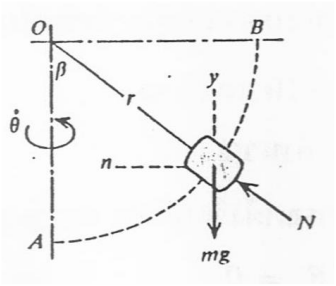


หลักการวิเคราะห์ :

สำหรับเสถียรภาพของตัวเลื่อน ตัวเลื่อนจะไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ เทียบกับราว AB ตัวเลื่อนจะเคลื่อนที่เป็นวงกลม ในแนวระดับรอบแกนดิ่งผ่านจุด A โดยรัศมีวงกลมเป็น $r\sin\beta$

การคำนวณ :

พิจารณา FBD ของตัวเลื่อน



$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N\cos\beta$

$\Rightarrow \quad R = \dfrac{mg}{\cos 60^o}$

$\sum F_n = ma_n \quad \Rightarrow \quad N\sin\beta = m(r\sin\beta)\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow \quad \dfrac{mg}{\cos\beta}\sin\beta = m(r\sin\beta)\dot{\theta}^2$

$\Rightarrow \quad \beta = \cos^{-1}\dfrac{g}{r\dot{\theta}^2}$

โดย $\dot{\theta} \le \sqrt{\dfrac{g}{r}}$ เนื่องจาก ค่า cos สูงสุดคือ 1 **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 6 เลขหน้า 13/113

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 12 : อนุภาคมวล 2 kg เคลื่อนที่ในแนวระดับโดยมีพิกัดเชิงขั้วดังสมการ $r = 2t^3 - 3t + 4$ และ $\theta = 2\sin\frac{1}{2}\pi t$ เมื่อ r มีหน่วยเป็น m และ θ มีหน่วยเป็น rad และ t มีหน่วยเป็น s จงหาแรงลัพธ์ในแนวระดับที่กระทำต่ออนุภาคที่เวลา $t = 2s$

หลักการวิเคราะห์ :

หาความเร่ง a_r และ a_θ ของอนุภาคที่เวลา $t = 2s$ แล้วจึงหา F_r และ F_θ จากสมการ $F = ma$

การคำนวณ :

$r = 2t^3 - 3t + 4$	$\theta = 2\sin\frac{1}{2}\pi t$
$\dot{r} = 6t^2 - 3$	$\dot{\theta} = \pi\cos\frac{1}{2}\pi t$
$\ddot{r} = 12t$	$\ddot{\theta} = -\frac{\pi^2}{2}\sin\frac{1}{2}\pi t$

ที่เวลา $t = 2s$

$r = 14$ m, $\dot{r} = 21$ m/s, $\ddot{r} = 24$ m/s^2

$\theta = 0$, $\dot{\theta} = (-\pi)$, rad/s , $\ddot{\theta} = 0$

$\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \Rightarrow \sum F_r = 2[24 - 14(-\pi^2)] = -228$ N

$\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \Rightarrow \sum F_\theta = 2[0 + 3(21)(-\pi] = -264$ N

$\Rightarrow F = \sqrt{(-228)^2 + (-264)^2}$

$= 348.7$ N

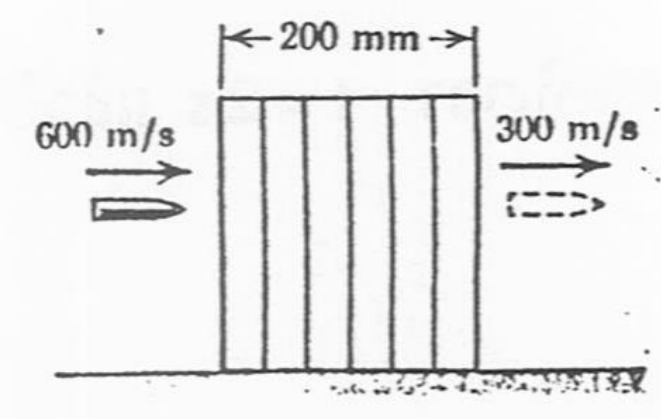
ข้อสังเกต :

$\sum F_r$ และ $\sum F_\theta$ มีเครื่องหมายลบ แสดงว่า $\sum F_r$ และ $\sum F_\theta$ มีทิศในแนวทางลบของแกน r และแกน θ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 1/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : ลูกปืนมวล 60 g วิ่งผ่านทะลุแผ่นไม้หนา 200 mm ถ้าลูกปืนเข้ากระทบแผ่นไม้ด้วยความเร็ว 600 m/s และทะลุออกด้วยความเร็ว 300 m/s จงหาแรงเสียดทานเฉลี่ยของแผ่นไม้



หลักการวิเคราะห์ :

ให้ใช้แรงเสียดทานเฉลี่ยเป็นแรงคงที่ในการหางานของแรงเสียดทาน

การคำนวณ :

งานของแรงเสียดทาน $U = -R(0.20)$ J

จากสมการ $U = \Delta T \quad \Rightarrow \quad -0.20R = \frac{1}{2}(0.06)[(300^2 - 600^2)]$

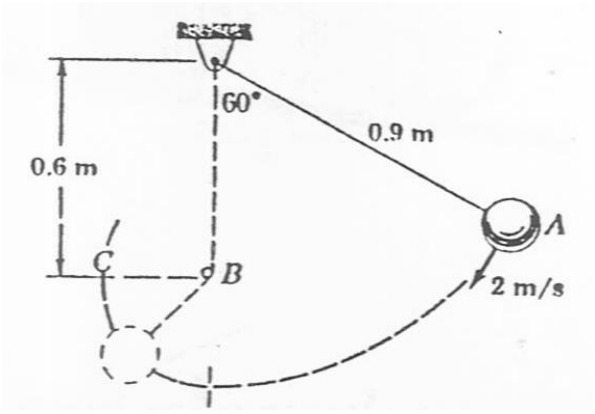
$R = 40{,}500$ N $= 40.5$ kN **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 7 เลขหน้า 2/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. ลูกบอลถูกปล่อยจากตำแหน่ง A ด้วยความเร็ว 2 m/s ให้แกว่งไปบนระนาบดิ่งที่จุดต่ำสุด เส้นเชือกจะกระทบหลัก B และลูกบอลจะเคลื่อนที่ไปตามแนวเส้นประ จงหาความเร็ว v_C ของลูกบอลที่ตำแหน่ง C

ตอบ. ($v_C = 2.63$ m/s)



หลักการวิเคราะห์ :

แรงที่เกิดงาน คือ น้ำหนัก ส่วนแรงตึงในเส้นเชือก จะไม่เกิดงานเนื่องจากทรงกลมไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวรัศมี (ซึ่งเป็นแนวแรงของแรงตึงในเส้นเชือก)

การคำนวณ :

ระยะเคลื่อนที่ในแนวดิ่งจาก A ไป C คือ

$$\Rightarrow \quad 0.6 - 0.9\cos 60^{o} = 0.15 \text{ m}$$

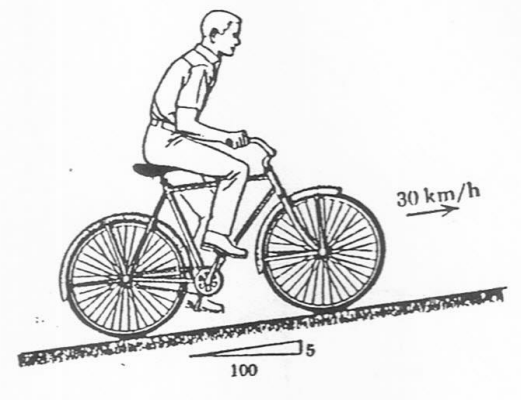
จากสมการ $U = \Delta T \quad \Rightarrow \quad +mg(0.15) = \frac{1}{2}m[(v_c^2 - 2^2)]$

$$v_c = 2.63 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 3/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3. ชายคนหนึ่งและจักรยานมีมวลรวมกันเท่ากับ 90 kg จงหากำลัง P ของชายคนนี้ในการขี่จักรยานขึ้นทางลาด 5 % ด้วยอัตราเร็วคงที่ 30 km/hr



หลักการวิเคราะห์ :

กำลัง P ที่ใช้จะมีขนาดเท่ากับอัตราของงานในการเคลื่อนที่มวล 90 kg ขึ้นไปตามพื้นแนวเอียง

การคำนวณ :

มุมของทางชัน 5 % คือ

$$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{5}{100}) = 2.86^{o}$$

จากสมการ $P = \vec{F}.\vec{v}$

$$\Rightarrow \quad P' = F.v\cos(90+\theta)$$

$$\Rightarrow \quad P' = (90 \text{ x } 9.81)(\frac{30}{3.6})\cos(90+2.86)$$

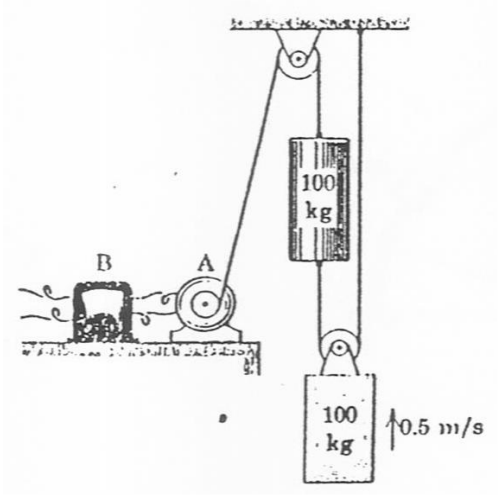
$$\Rightarrow \quad P' = -367.1 \text{ W}$$

ดังนั้นชายคนนี้ จะต้องใช้กำลัง $P = 367.1$ W **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 4/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : มอเตอร์ A ที่ใช้กว้านมวล 100 kg จำนวน 2 ชิ้น ดังรูป ถ้ามวลชิ้นล่างถูกดึงขึ้นด้วยอัตราเร็วคงที่ 0.5 m/s และวัตต์มิเตอร์ B อ่านค่าได้ 1.6 kW จงหาประสิทธิภาพรวมทางไฟฟ้าและทางกลของระบบ



หลักการวิเคราะห์ :

ประสิทธิภาพรวมของระบบคือ กำลังในการกว้านมวล100 kg ทั้งสองขึ้นไป หารด้วยกำลังไฟฟ้าที่ใส่ให้แก่มอเตอร์ โดยมวล 100 kg ชิ้นบน จะมีความเร็วเป็นสองเท่าของชิ้นล่าง

การคำนวณ :

จากสมการ $P = \dot{U}$

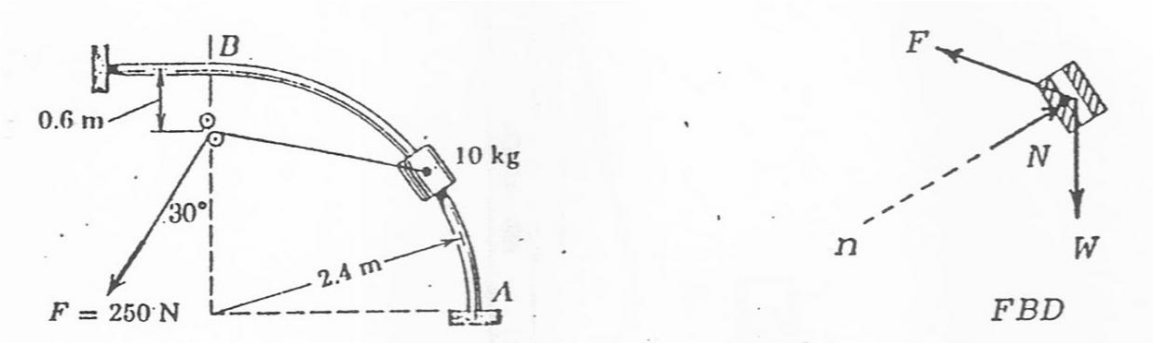
$$\Rightarrow \quad P_{out} = 100 \times 9.81 \times (0.5+1) = 1{,}471.5 \text{ W}$$

$$e = \frac{P_{out}}{P_{1n}} \quad \Rightarrow \quad e = \frac{1{,}471.5}{1{,}600} = 0.92$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 5/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5 : วัตถุมวล 10 kg เคลื่อนที่ได้อิสระบนราววงกลม ถ้าวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จาก A โดยแรงกระทำคงที่ 250 N บนสายเคเบิ้ล จงหาความเร็วของ v ของวัตถุ เมื่อเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่ง B



หลักการวิเคราะห์ :

วัตถุเคลื่อนที่จาก A ไป B จะเกิดงานเนื่องจากแรงดึงคงที่ 250 N และน้ำหนักส่วนแรงปฏิกิริยา N ในแนวตั้งฉากจะไม่เกิดงาน

การคำนวณ ;

ระยะที่เคลื่อนที่ตามแนวของแรงดึง 250 N คือ

$$\Rightarrow \quad \sqrt{(2.4)^2+(2.4-0.6)^2} - 0.6 = 2.40 \text{ m}$$

จากสมการ $U = \Delta T$

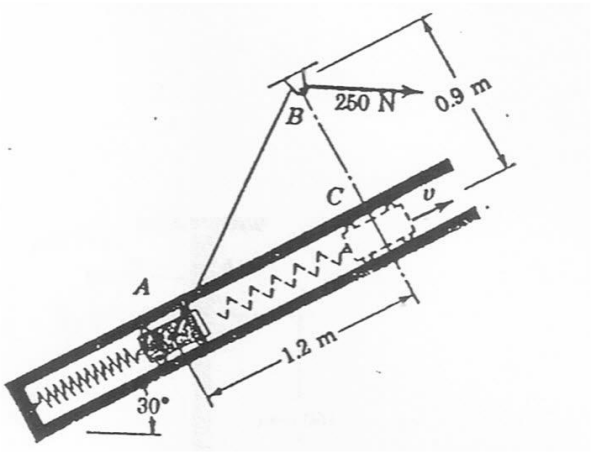
$$\Rightarrow \quad 250(2.40) - 10(9.81)(2.4) = \frac{1}{2}(10)(v_B^2 - 0)$$

ดังนั้นความเร็ว $v_c = 8.54$ m/s **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 6/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 6 : ตัวเลื่อน A มีมวล 10 kg เคลื่อนที่ขึ้นไปตามรางโดยไม่มีความเสียดทาน สปริงที่ยึดอยู่มีค่า $k = 60$ N/m และยืดอยู่เป็นระยะ 0.6 m ที่ตำแหน่ง A ซึ่งตัวเลื่อนถูกปล่อยจากสภาวะหยุดนิ่ง แรงกระทำ 250 N มีค่าคงที่และไม่คิดแรงเสียดทานที่รอก จงหาความเร็วของตัวเลื่อนขณะผ่านจุด C



หลักการวิเคราะห์ :

เมื่อพิจารณาการเปลี่ยนแปลงของพลังงานศักย์โน้มถ่วงและพลังงานศักย์ยืดหยุ่น ในการเคลื่อนที่จาก A ไป C งานที่เกิดขึ้นจะมีเพียงงานของแรง 250 N เท่านั้น

การคำนวณ :

ระยะเคลื่อนที่ของแรง 250 N คือ $\overline{AB} - \overline{BC} = \sqrt{(0.9)^2 + (1.2)^2} - 0.9 = 0.6$ m

งานของแรง 250 N คือ

$$\Rightarrow \quad 250(0.6) = 150 \text{ J}$$

การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง

$$\Rightarrow \quad \Delta v_g = mgh = 10 \text{x} 9.81 \text{x} (1.2 \sin 30^o) = 58.86 \text{ J}$$

การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ยืดหยุ่น

$$\Rightarrow \quad \Delta v_e = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} \text{x } 60 \text{ x} [(1.2 + 0.6)^2 - (0.6)^2] = 86.4 \text{ J}$$

จากสมการ

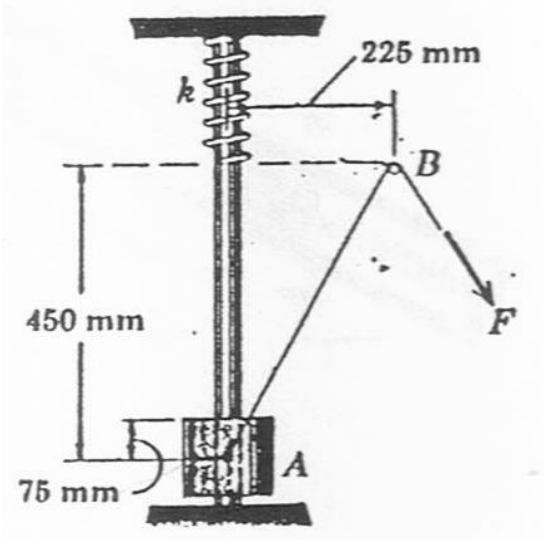
$$U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}(10)(v^2 - 0) + 58.86 + 86.4$$

$$v = 0.974 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 7/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 7 : ปลอก A มีมวล 7 kg เลื่อนขึ้นลงบนเพลาโดยไม่มีความเสียดทาน ปลอกถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งที่ด้านล่างของเพลา ให้เคลื่อนที่ขึ้นด้วยแรง $F = 200\,N$ จงหาค่า k ของสปริงถ้าระยะกดของสปริงถูกจำกัดให้เท่ากับ $75\,mm$ โดยตำแหน่งของรอกเล็ก ๆ นั้นคงที่



หลักการวิเคราะห์ :

ขณะที่ปลอก A กดสปริงเป็นระยะ 75 mm ที่จุด A และ B จะอยู่ในแนวระดับเดียวกัน และมีความเร็วของ A เป็นศูนย์

การคำนวณ :

ระยะเคลื่อนที่ตามแรง F คือ $\sqrt{(0.45)^2 + (0.225)^2} - 0.225 = 0.278$ m

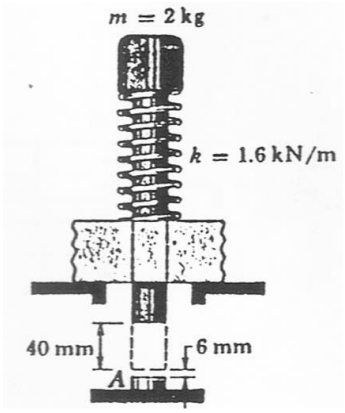
จากสมการ $U = \Delta T \quad \Rightarrow \quad 200(0.278) - 7(9.81)(0.45) - \frac{1}{2}k[(0.75)^2 - 0]$

$\Rightarrow \quad k = 8{,}790$ N/m **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 7 เลขหน้า 8/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 8 : ปลายของก้านเจาะซึ่งมีมวล 2 kg จะอยู่ในตำแหน่งเส้นประเมื่ออยู่ในสภาวะสมดุลบนสปริงที่มีค่า $k = 1.6$ kN/m ปลายด้านบนของสปริงเชื่อมติดกับก้านเจาะและปลายด้านล่างเชื่อมติดกับแผ่นฐาน ถ้าก้านเจาะถูกดึงขึ้นเป็นระยะ 40 mm เหนือตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อยจากสภาวะหยุดนิ่ง จงหาความเร็วของก้านเจาะ เมื่อกระทบกับแป้น A กำหนดให้ไม่คิดความเสียดทานในระบบ



หลักการวิเคราะห์ :

พิจารณาการเปลี่ยนแปลงของพลังงานในระบบในการเคลื่อนที่ จากสภาวะหยุดนิ่งจนกระทบแป้น A ที่สภาวะสมดุล สปริงจะถูกกดโดยน้ำหนักของก้านเจาะมีค่าเท่ากับ $x_O = \frac{2 \times 9.81}{1{,}600} = 0.01226$ m

การคำนวณ

ที่สภาวะหยุดนิ่ง สปริงจะถูกยืดเป็นระยะ

$x_1 = 0.040 - x_O = 0.02774$ m

เมื่อกระทบกับแป้น A สปริงจะถูกกดเป็นระยะ

$x_2 = 0.006 + x_O = 0.01826$ m

การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์ยืดหยุ่น

$$\Rightarrow \quad \Delta v_e = \frac{1}{2} k(x_2^2 - x_1^2) = \frac{1}{2} \times 1600 \times [(0.01826)^2 - (0.02774)^2] = -0.3849 \text{ J}$$

การเปลี่ยนแปลงพลังงานศักย์โน้มถ่วง

$$\Rightarrow \quad \Delta v_g = m g h = 2 \times 9.81 \times (-0.046) = -0.9025 \text{ J}$$

การเปลี่ยนแปลงพลังงานจลน์

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}(2)(v^2 - 0) = v^2$$

จากสมการ

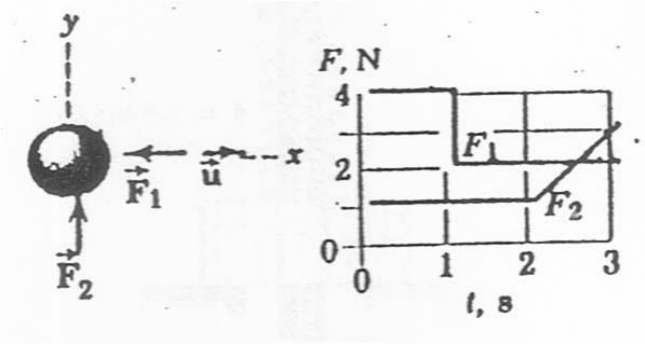
$$U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta v_e \quad \Rightarrow \quad v^2 - 0.9025 - 0.3489$$

$$v = 1.119 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : อนุภาคมวล 0.5 kg เคลื่อนที่ในแนวระดับ และมีความเร็ว u =10 m/s ในทิศทาง x ที่เวลา t = 0 แรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ มากระทำต่ออนุภาค โดยมีขนาดแปรผันดังกราฟ จงหาความเร็วของอนุภาคโดยมีขนาดแปรผันดังกราฟ จงหาความเร็วของอนุภาคที่เวลา t = 3 s



หลักการวิเคราะห์ :

ให้พิจารณาอิมพัลส์และโมเมนตัมของแต่ละแรง โดยมีขนาดเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ F-t ในช่วงเวลา t = 0 ถึง t = 3s

การคำนวณ :

ในแนวแกน x มีอิมพัลส์เชิงเส้นของแรง F_1

$$\int_0^3 \sum F_x \, dt = \Delta G_x$$

$$\Rightarrow \quad -[4(1)+2(3-1)] = 0.5(v_x - 10)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = -6 \text{ m/s}$$

ในแนวแกน y มีอิมพัลส์เชิงเส้นของแรง F_2

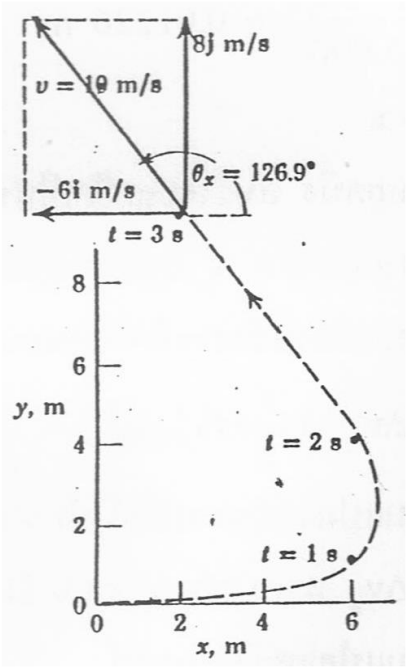
$$\int_0^3 \sum F_y \, dt = \Delta G_y$$

$$\Rightarrow \quad [1(2)+2(3-1)] = 0.5(v_y - 0)$$

$$\Rightarrow \quad v_y = 8 \text{ m/s}$$

เมื่อ $\vec{v} = -6\vec{i} + 8\vec{j}$ และ $v = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ m/s

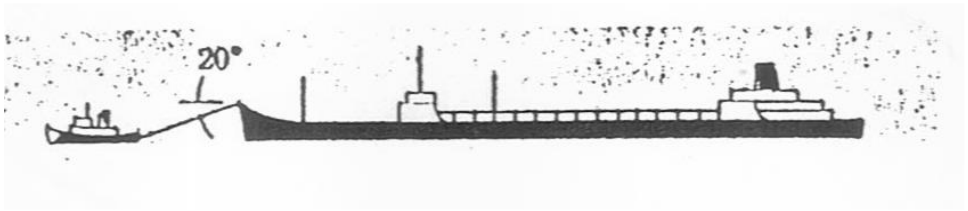
ดังนั้น $\theta_x = 126.9^o$ **ตอบ**



ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 8 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 : เรือลำหนึ่งมีมวล 150×10^3 metrictons ถ้าสายเคเบิ้ลที่ผูกติดกับเรือลากจูงมีความตึง $200\,kN$ จงหาระยะเวลาที่เรือจะมีความเร็วเป็น 1 knot จากสภาวะหยุดนิ่งสมมุติไม่คิดแรงเสียดทานอื่น ๆ (1 knot $= 1.852$ km/hr)



หลักการวิเคราะห์ :

เมื่อพิจารณาในแนวการเคลื่อนที่ของเรือ แรงที่ทำให้เกิดอิมพัลส์เชิงเส้น คือ $200\cos 20^o$ kN

การคำนวณ :

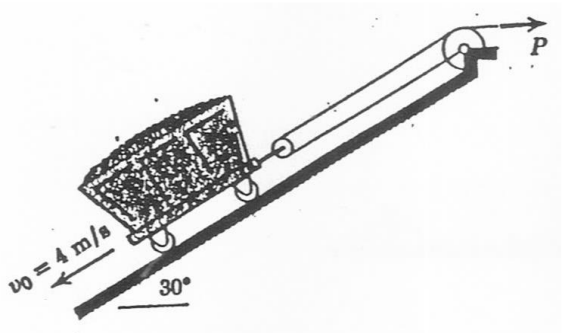
$$\Rightarrow \quad 200\cos 20^o\,(10^3)\,\Delta t = 150 \times 10^3 [\frac{1 \times 1.852}{3.6} - 0]$$

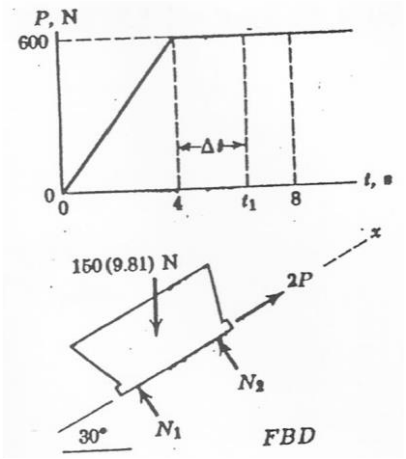
$$\Rightarrow \quad \Delta t = 410.6 \text{ s} \qquad \text{หรือ} \qquad \Delta t = 6.84 \text{ min} \qquad \textbf{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : รถขนถ่ายมวลรวม 150 kg เคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียงด้วยความเร็ว 4 m/sเมื่อมีแรง P มากระทำที่เวลา $t = 0$ แรง P เพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอจนถึง $600\,N$ ที่เวลา $t = 4\,s$ หลังจากนั้นจะมีค่าคงที่ จงหาเวลา t_1 ที่รถขนถ่ายจะกลับทิศทางการเคลื่อนที่ และความเร็วของรถขนถ่ายที่เวลา $t = 8\,s$ กำหนดให้รถขนถ่ายเป็นอนุภาค





หลักการวิเคราะห์ :

เมื่อพิจารณาการเคลื่อนที่ของรถขนถ่ายในแนวพื้นเอียง แรงที่ทำให้เกิดอิมพัลส์และโมเมนตัมเชิงเส้นคือ $2P$ ในทิศขึ้น และ $mg\sin 30^o$ ในทิศลง รถขนถ่ายจะกลับทิศการเคลื่อนที่ เมื่อความเร็วชั่วขณะเป็นศูนย์

การคำนวณ :

กำหนดให้ทิศขึ้นตามแนวพื้นเอียงเป็นทิศทางเป็น $+x$ และสมมุติให้รถขนถ่ายเริ่มกลับทิศการเคลื่อนที่ (เคลื่อนที่ขึ้น) ที่เวลา $t = 4 + \Delta t$

$$\int_0^{t+\Delta t} \sum F_x \, dt = \Delta G_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(4)(2 \text{ x } 600) + (2 \text{ x } 600) - 150(9.81)\sin 30^o(4 + \Delta t) = 150[0 - (-4)]$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = 2.46 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \quad t = 4 + \Delta t = 4 + 2.46 = 6.46 \text{ s}$$

$$\int_0^{8} \sum F_x \, dt = \Delta G_x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(4)(2 \text{ x } 600) + 4(2 \text{ x } 600) - 150(9.81)\sin 30^o(8) = 150[v - (-4)]$$

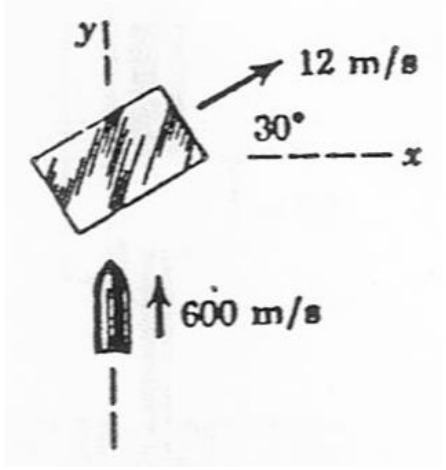
$$\Rightarrow \quad v = 4.76 \text{ m/s}$$

ดังนั้นที่เวลา $t = 8\,s$ รถขนถ่ายจะมีความเร็วเท่ากับ $v = 4.76$ m/s ในทิศทางขึ้น **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : ลูกปืนมวล 0.05 kg ความเร็ว 600 m/s เข้ากระทบวัตถุมวล 4 kg แล้วฝังอยู่ภายใน ถ้าวัตถุเคลื่อนที่อยู่บนระนาบระดับผิวเรียบ ด้วยความเร็ว 12 m/s ในทิศทางดังรูป ก่อนที่ลูกปืนจะมากระทบ จงหาความเร็ว v ของวัตถุและลูกปืน ที่เคลื่อนที่ไปด้วยกันหลังการกระทบ



หลักการวิเคราะห์ :

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบ (ลูกปืนและวัตถุ) ในระนาบระดับ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบในแนวแกน x และ y จะมีค่าคงที่

การคำนวณ :

$\Delta G_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(12\cos 30^o) + 0 = (4+0.05)v_x$

$\Rightarrow \quad v_x = 10.26 \text{ m/s}$

$\Delta G_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 4(12\sin 30^o) + 0.05(600) = (4+0.05)v_x$

$\Rightarrow \quad v_y = 13.33 \text{ m/s}$

ดังนั้น

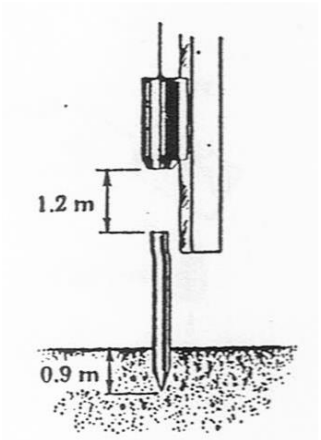
$\Rightarrow \quad v = \sqrt{(10.26)^2 + (13.33)^2} = 16.82 \text{ m/s}$

$\Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\dfrac{13.33}{10.26} = 52.41^o$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 8 เลขหน้า 9/11

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5 : ตุ้มน้ำหนักมวล 400 kg ถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งที่ระยะ 1.2 m ลงมากระทบเสาเข็มซึ่งมีมวล 250 kg ซึ่งฝังอยู่ในดินลึก 0.9 m หลังการกระทบ ตุ้มเหล็กจะเคลื่อนที่ไปพร้อมกับเสาเข็มโดยไม่กระดอนขึ้น จงหาความเร็ว v ของเสาเข็มและตุ้มน้ำหนักทันทีหลังการกระทบ



หลักการวิเคราะห์ :

หาความเร็วของตุ้มน้ำเหล็กก่อนกระทบเสาเข็มโดยใช้สมการงานและพลังงานในการกระทบ ช่วงเวลาก่อนการกระทบจนถึงทันทีหลังการกระทบถือว่าสั้นมาก $\int \sum F dt \approx 0$ ดังนั้นจะได้ $\Delta G = 0$

การคำนวณ :

$U = \Delta T + \Delta v_g \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} m (v_O^2 - 0) - m g h$

$\Rightarrow \quad v_O = \sqrt{2 g h}$

$\Rightarrow \quad v_O = \sqrt{2 \times 9.81 \times 1.2} = 4.85 \text{ m/s}$

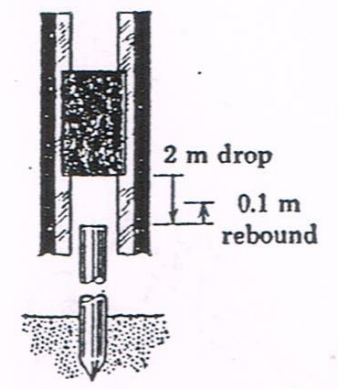
$\Delta G = 0 \quad \Rightarrow \quad 400(4.85) + 250(0) = (400 + 250) v$

$\Rightarrow \quad v = 2.98 \text{ m/s}$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 1/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

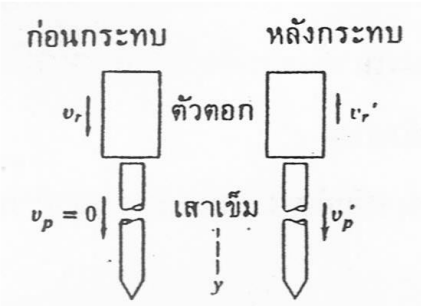
ข้อที่ 1 ตัวตอกเสาเข็มมวล 800 kg ถูกปล่อยจากความสูง 2 m เหนือเสาเข็มที่มีมวล 2,400 kg ถ้าตัวตอกเสาเข็มกระดอนขึ้น 0.1 m ทันทีหลังกระทบเสาเข็ม จงคำนวณหาค่าการสูญเสียพลังงาน



หลักการวิเคราะห์ :

จากหลักการของงานและพลังงาน วัตถุที่ปล่อยให้ตกลงมาระดับความสูง h จะมีความเร็วเท่ากับ $\sqrt{2gh}$ ในทำนองเดียวกัน วัตถุที่มีความเร็วต้น $\sqrt{2gh}$ ก็จะสามารถเคลื่อนที่ขึ้นไปได้สูง h เช่นเดียวกัน

การคำนวณ :



(ก) ความเร็วของตัวตอกก่อนกระทบเสาเข็ม

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{2 \times 9.81 \times 2} = 6.26 \text{ m/s}$$

ความเร็วของตัวตอกหลังกระทบเสาเข็ม

$$\Rightarrow \quad v' = \sqrt{2 \times 9.81 \times 0.1} = 1.40 \text{ m/s}$$

$$\Delta G_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 800(6.26) + 0 = 800(-1.40) + 2{,}400 v_p'$$

$$\Rightarrow \quad v_p' = 2.55 \text{ m/s} \qquad \textbf{ตอบ}$$

(ข) $$\Rightarrow \quad e = \frac{2.55 + 1.40}{6.26 + 0} = 0.63 \qquad \textbf{ตอบ}$$

(ค) พลังงานจลน์หลังกระทบ เท่ากับ

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(800)(6.26)^2 = 15{,}675 \text{ J}$$

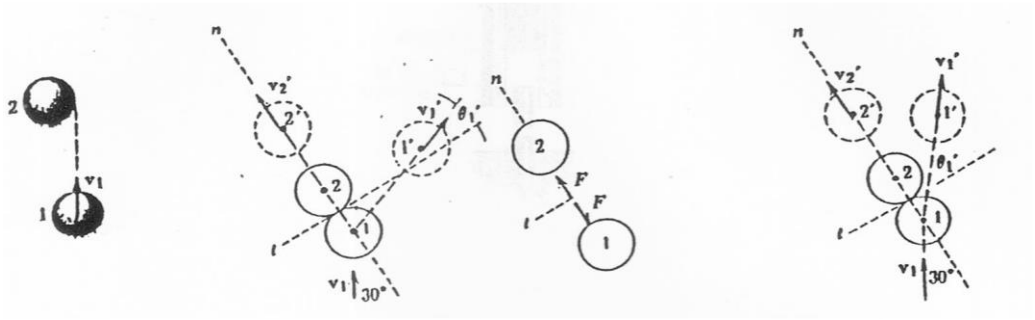
พลังงานจลน์หลังการกระทบ คือ $\frac{1}{2}(800)(1.40)^2 + \frac{1}{2}(2{,}400)(2.55)^2 = 8{,}587$ J

พลังงานสูญเสียเท่ากับ $\frac{15{,}675 - 8{,}587}{15{,}675} \times 100 = 45.2\ \%$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 2/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 ทรงกลม 1 มีความเร็ว $v_1 = 6$ m/s ในทิศทางดังรูป วิ่งเข้าชนทรงกลม 2 ซึ่งมีลักษณะเหมือนกันและอยู่นิ่ง ถ้าสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e = 0.6$ จงหาความเร็วหลังการกระทบและเปอร์เซ็นต์การสูญเสียพลังงาน



หลักการวิเคราะห์ :

การกระทบในที่นี้เป็นแบบ Oblique ดังนั้นจึงต้องหาแนวสัมผัสของการกระทบคือ ทิศทาง x หรือ t และแนวตั้งฉากคือทิศ n เพื่อนำสมการสำหรับทิศทางนั้น ๆ มาใช้ได้ถูกต้อง

การคำนวณ :

หาแนวสัมผัส t และแนวตั้งฉาก n ดังรูป จะได้ว่า ความเร็ว $v_1 = 6$ m/s ทำมุม 30^o กับทิศทาง n หลังการกระทบ สมมุติให้ทรงกลม1 มีความเร็ว v_1' ในทิศทางทำมุม θ_1' กับทิศทาง $-t$ ส่วนทรงกลม 2 มีความเร็วเป็น v_2' ในทิศทาง $+n$ (ก่อนการกระทบทรงกลม 2 หยุดนิ่ง แรงการทบที่มากระทำ คือ F ในทิศทาง $+n$ ดังนั้นทรงกลม 2 จึงมีความเร็วหลังการกระทบในทิศทางเดียวกับ F คือ ทิศทาง $+n$

$$\Delta G_n = 0 \quad \Rightarrow \quad m v_2' + m v_1' \sin\theta_1' - m(6\cos 30^o) + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_2' + v_1' \sin\theta_1' - 3\sqrt{3} = 0 \qquad ...(1)$$

$$\Delta G_t = 0 \quad \Rightarrow \quad m v_1' \cos'\theta_1 + m v_1' \sin\theta_1' - m(6\sin 30^o) \qquad ...(2)$$

สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e = 0.6 = \dfrac{v_2' - v_1'(\sin\theta'^1)}{6\cos 30 - 0}$ ...(3)

จากสมการที่ (1) , (2) และ (3) จะได้

$v_1' = 3.18$ m/s , $v_2' = 4.16$ m/s , $\theta_1' = 19.11^o$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 10 เลขหน้า 3/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

พลังงานจลน์ก่อนการกระทบ คือ

$$T = \frac{1}{2}m(6)^2 = 18\ m \quad J$$

พลังงานจลน์หลังการกระทบ คือ

$$T' = \frac{1}{2}m(3.18)^2 + \frac{1}{2}m\,(4.16)^2 = 13.71m \quad J$$

$$\Delta E\,(100) = \frac{T - T'}{T}(100)$$

$$= \frac{18m - 13.71\ m}{18m} + \frac{1}{2}m\ (4.16)^2 = 23.8\%$$

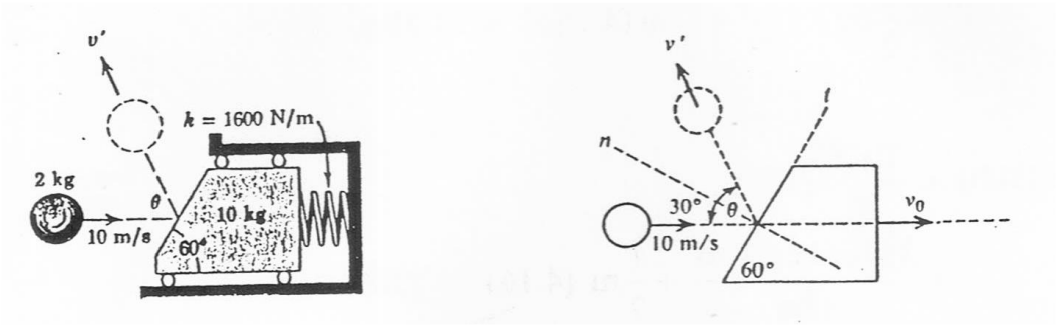
ข้อสังเกต :

ทิศทางของทรงกลม 2 หลังการกระทบ หากสมมุติให้ทำมุมกับ θ_2' ในทิศทาง $+n$ ก็จะได้คำตอบ $\theta_2' = 0$ โดยสมการเพิ่มเติมที่ใช้คือ $\Delta G_t = 0$ สำหรับทรงกลม 2

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 10 เลขหน้า 4/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ทรงกลมมวล 2 kg วิ่งด้วยความเร็วในแนวราบ 10 m/sเข้ากระทบกับรถเลื่อนซึ่งรองรับด้วยสปริงที่มีค่า Stiffness of Spring , k = 1,600 N/m รถเลื่อนเดิมทีอยู่ในตำแหน่งหยุดนิ่งและสปริงมีความยาวปกติ ถ้าสัมประสิทธิ์การคืนสภาพ e = 0.60 จงหาความเร็ว v′ และมุม θ ของทรงกลมรวมทั้งระยะทางมากที่สุดที่รถเลื่อนเคลื่อนที่



หลักการวิเคราะห์ :

การกระทบเป็นแบบ Oblique แนวสัมผัส t คือแนวพื้นเอียงของล้อเลื่อน และในที่นี้ระยะเคลื่อนที่สูงสุดของล้อเลื่อน คือ ระยะยุบตัวสูงสุดของสปริง

การคำนวณ :

$$\Delta G_n = 0 \quad \Rightarrow \quad -2(10\cos 30^o)+10(0) = 2v_2' \cos(\theta - 30^o) - 10(v_O \cos 30^o)$$

$$-2(10\cos 30^o)+10(0) = 2v_2' \cos(\theta - 30^o) - 10(v_O \cos 30^o) \qquad ...(1)$$

สัมประสิทธิ์การคืนสภาพ $e = 0.6 = \dfrac{v' \cos(\theta - 30) + v_O \cos 30^o}{10\cos 30^o + 0}$ ...(2)

$$\Delta G_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2(10\sin 30^o) - 2v' \sin(\theta - 30^o) = 0 \qquad ...(3)$$

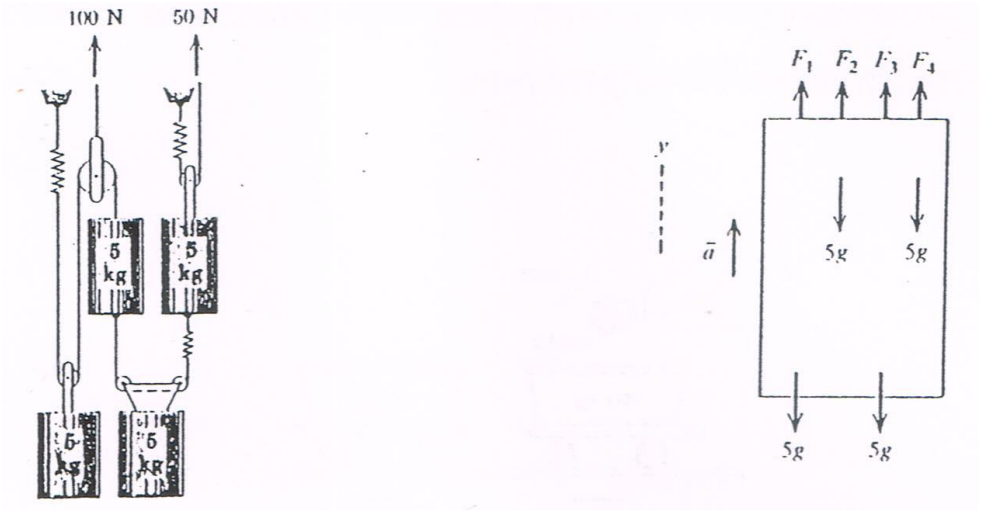
จากสมการที่ (1) , (2) และ (3) จะได้

$v' = 6.04$ m/s , $v_O' = 2.087$ m/s , $\theta_1' = 85.9^o$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 1/5

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : จงหาความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ ซึ่งประกอบด้วยทรงกระบอกมวล 5 kg จำนวน 4 ชิ้น สมมุติให้ไม่คิดความเสียดทานของมวล ของรอกและสปริง



หลักการวิเคราะห์ :

ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของระบบ คือ ความเร่งในแนวดิ่ง

การคำนวณ :

$$\Rightarrow \quad F_1 = 50\ N\ ,F_2 = 100\,N\ ,F_3 = 50\ N, F_4 = 50\,N$$

จากสมการ $\sum F = ma$

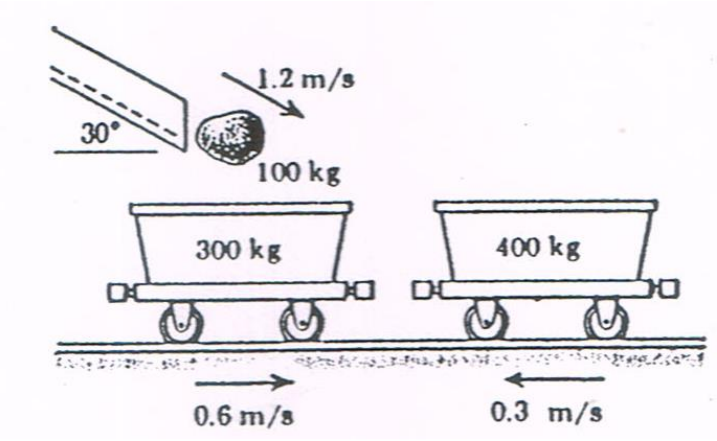
$$\Rightarrow \quad (50+100+50+50) - 20(9.81) = 20\,a$$

$$\Rightarrow \quad a = 2.69\ m/s^2$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 2/5

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2: รถขนแร่มวล 300kg และ 400 kg เคลื่อนที่ในทิศทางตรงกันข้าม ด้วยอัตราเร็ว 0.6 m/s และ 0.3 m/s ตามลำดับดังรูป โดยรถทั้งสองจะล็อคติดกัน หลังการชนโดยทันทีทันใด ก่อนการชนนั้น มีก้อนแร่มวล 100 kg ตกลงมาจากรางด้วยความเร็ว 1.2 m/s ในทิศทางดังรูป ลงสู่รถขนแร่มวล 300kg จงหาความเร็วของระบบหลังจากก้อนแร่หยุดนิ่งเทียบกับรถ ความเร็วนี้จะมีค่าเท่าเดิมหรือไม่หากการชนเกิดขึ้นก่อนที่ก้อนแร่จะตกลงมา



หลักการวิเคราะห์ :

เนื่องจากไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อระบบในแนวราบ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบในแนวราบจึงมีค่าคงที่

การคำนวณ :

$\Delta G_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 300(0.6) - 400(0.3) + 100(1.2\cos 30^\circ) = (300 + 400 + 100)v$

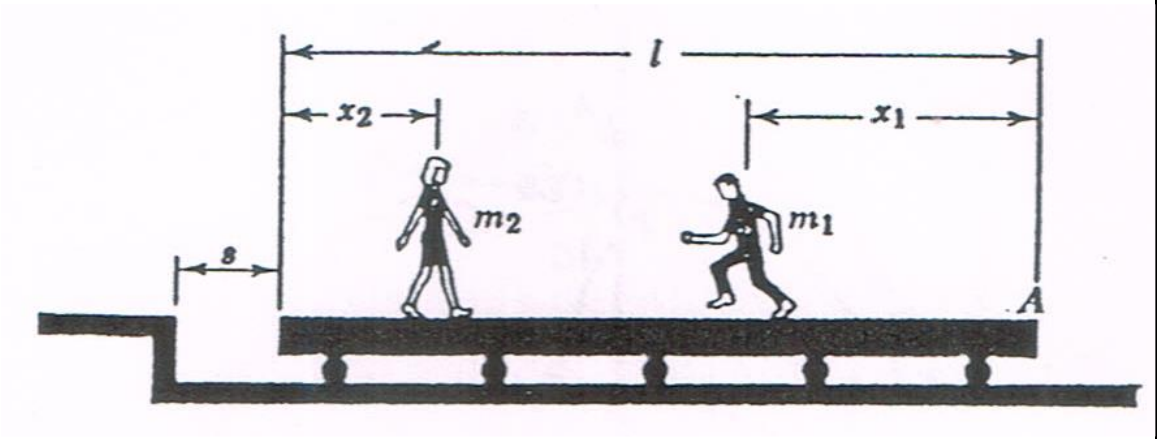
$\Rightarrow \quad v = 0.205$ m/s **ตอบ**

หากการชนเกิดขึ้นก่อนก้อนแร่ตกลงมา ความเร็วที่ได้จะยังมีค่าเดิม เนื่องจากแรงทั้งหลายในแนวราบเป็นแรงภายในของระบบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 3/5

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 ผู้ชายมวล m_1 และผู้หญิงมวล m_2 ยืนอยู่ที่ปลายของแผ่นไม้คนละด้านของแผ่นไม้มวล m_O ซึ่งอยู่นิ่งที่ $s = 0$ และจะเคลื่อนที่ไปบนลูกกลิ้งโดยไม่มีความเสียดทาน เมื่อคนทั้งสองเดินเข้าหากัน จงหาการขจัด s ของแผ่นไม้เมื่อคนทั้งสองเดินมาพบกันในเทอมการขจัด x_1 ของผู้ชายเทียบกับแผ่นไม้



หลักการวิเคราะห์ :

จากทฤษฎีของวาริกนัน $m\vec{r} = \sum m_i \vec{r}_i$ ดังนั้น $(\sum m_i \vec{r}_i)_{s=0} = (\sum m_i \vec{r}_i)_{s=s}$

การคำนวณ :

$$\Rightarrow \quad (\sum m_i \vec{r}_i)_{s=0} = (\sum m_i \vec{r}_i)_{s=s}$$

$$\Rightarrow \quad m_1 l + m_2(0) + m_O \frac{l}{2} = m_1(s + l - x_1) + m_2(s + x_2) + m_O(\frac{l}{2} + s)$$

$$\Rightarrow \quad s = \frac{m_1 x_1 - m_2 x_2}{m_O + m_1 + m_2}$$

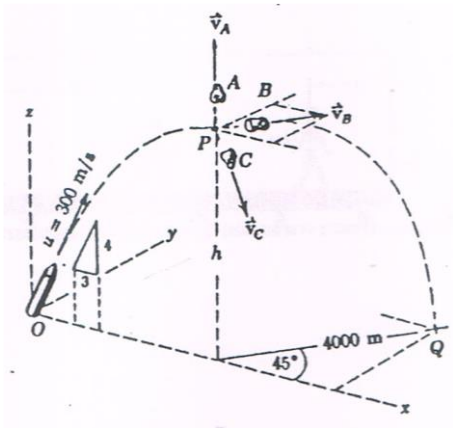
แต่ $\Rightarrow \quad x_2 = l - x_1$

ดังนั้น $\left[s = \frac{(m_1 + m_2) x_1 - m_2 l}{m_O + m_1 + m_2} \right]$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 11 เลขหน้า 4/5

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : ลูกกระสุนปืนใหญ่มวล 20 kg ถูกยิงจากจุด O ด้วยความเร็ว $u = 300$ m/s ในระนาบดิ่ง x - z โดยมีทิศทางดังรูป เมื่อขึ้นไปถึงจุดสูงสุด P กระสุนจะระเบิดออกเป็นสามส่วนคือ A , B และ C ทันทีทันใดหลังการระเบิดจะสังเกตเห็นว่า ชิ้นส่วน A จะเคลื่อนที่ในแนวดิ่งไปได้ระยะ 500 m เหนือจุด P ชิ้นส่วน B จะมีความเร็ว v_B ในระนาบระดับและจะตกสู่พื้นดินที่จุด Q มวล A , B และ C คือ 5 , 9 kg และ 6 kg ตามลำดับ จงหาความเร็วของชิ้นส่วน C ทันทีที่ระเบิด สมมุติไม่คิดแรงต้านของอากาศ



หลักการวิเคราะห์ :

หาความเร็วของกระสุนปืนใหญ่ที่จุด P โดยใช้สมการของการเคลื่อนที่วิถีโค้งอิสระ เมื่อกระสุนปืนใหญ่เกิดการระเบิด แรงของการระเบิดเป็นแรงภายในของระบบ ดังนั้นโมเมนตัมเชิงเส้นของระบบทันทีทันใดก่อนและหลังการระเบิดจึงมีค่าเท่ากัน

การคำนวณ :

การเคลื่อนที่วิถีโค้งอิสระจากจุด O ไป P

$v = v_1 + at \quad \Rightarrow \quad 0 = 300(\frac{4}{5}) + (-9.81)t$

$t = 24.5$ s

$v^2 = v_1^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad 0 = [300(\frac{4}{5})]^2 + 2(-9.81)h$

$\Rightarrow \quad h = 2{,}936$ m

ชิ้นส่วน A จะมีความเร็วเท่ากับ

$\Rightarrow \quad v_A = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 500} = 99.0$ m/s

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 11 เลขหน้า 5/5
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน	

ชิ้นส่วน B จะมีความเร็วเท่ากับ

$\Rightarrow$ เวลาที่เคลื่อนที่จากจุด P ไปยังจุด Q จะเท่ากับ 24.5 s

ความเร็ว $v_B = \frac{s}{t} = \frac{2,400}{24.5} = 163.3$ m/s

$\Delta G_n = 0 \quad \Rightarrow \quad m\vec{v} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B + m_C\vec{v}_C$

$\Rightarrow 20(300)(5\vec{i}) = 5(99\vec{k}) + 9(163.3)(\cos 45\,\vec{i} + \sin 45\,\vec{j}) + 6\vec{v}_C$

$\Rightarrow \quad \vec{v}_c = 427\,\vec{i} - 173\,\vec{j} - 82.5\,\vec{k}$ m/s

$\Rightarrow \quad v_c = \sqrt{(427)^2 + (-173)^2 + (-82.5)^2} = 468$ m/s

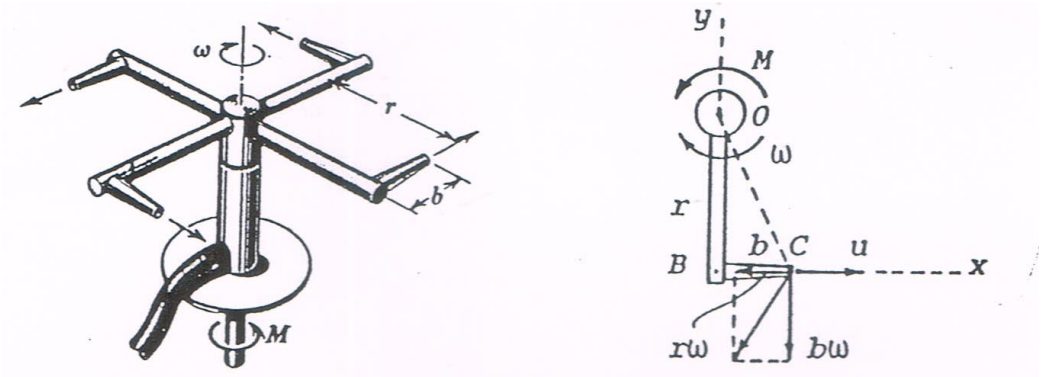
ตอบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 1/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : Sprinkler หมุนด้วยความเร็วคงที่ ω และจ่ายน้ำออกในอัตราปริมาตรการไหล Q หัวฉีดทั้งสี่มีพื้นที่หน้าตัดที่ทางออกเท่ากับ A จงหาโมเมนต์ M ที่ใส่ให้แก่เพลาที่ให้ Sprinkler หมุนด้วยความเร็วดังกล่าว และสำหรับค่าความดันและอัตราการไหล Q ที่กำหนดให้ จงหาอัตราการหมุน ω_O ของ Sprinkler ที่เกิดขึ้น เมื่อใส่โมเมนต์ให้แก่เพลา กำหนดให้ความหนาแน่นมวลของน้ำเป็น ρ

ตอบ. [$\omega = \omega_O = \dfrac{Qr}{4A(b^2 + r^2)}$]



วิธีทำ :

ให้ u คือวามเร็วของน้ำเทียบกับหัวฉีด ดังนั้น $u = \dfrac{Q}{4A}$

ความเร็วสัมบูรณ์ของอนุภาคน้ำ P ที่ออกจากหัวฉีดหาได้โดยใช้หลักการเคลื่อนที่สัมพัทธ์

ให้จุด B และ C เป็นจุดบน Sprinkler จะได้ว่า

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P/C} + \vec{v}_{C/B} + \vec{v}_{B/O} = u\,\vec{i} - b\omega\,\vec{j} - r\omega\,\vec{i}$$

สำหรับระบบทั้งหมด

$$\sum M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1)$$

$$-M = \rho Q[(-\frac{Q}{4A}r + b^2\omega + r^2\omega) - 0)$$

$$M = \rho Q[\frac{Qr}{4A} - (b^2 + r^2)\,] \qquad \textbf{ตอบ}$$

สำหรับค่า Q ที่กำหนด และ $M = 0$;

$$\omega = 0 = \frac{Qr}{4A(b^2 - r^2)} \qquad \textbf{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 2/6

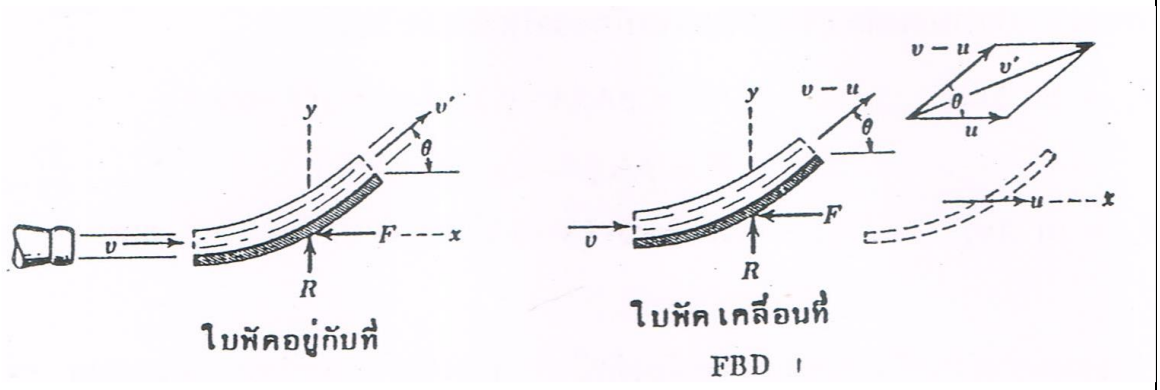
เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 :ไอน้ำจากหัวฉีดพื้นที่หน้าตัด A พุ่งเข้ากระทบใบจักรด้วยความเร็ว v ถ้าไอน้ำมีความหนาแน่นเป็น ρ จงหา ก) แรงในแนวย่อย F และ R ที่ยึดติดให้ใบจักรอยู่กับที่

ตอบ. [$F = \rho A v^2 (1-\cos\theta)$, $R = \rho A v^2 \sin\theta$]

ข) แรงที่ทำให้ใบจักรมีความเร็วคงที่ u โดย $u < v$ และมีทิศทางเดียวกับ v

ตอบ. [$F = \rho A(v-u)^2 (1-\cos\theta)$, $R = \rho A (v-u)^2 \sin\theta$]



วิธีทำ :

ก) เมื่อใบพัดคงที่ ความเร็วของไอน้ำที่ออกจากใบพัดคือ v′ จะมีขนาดเท่ากับความเร็วที่เข้าสู่ใบพัด v ทั้งนี้ถือว่าไม่มีแรงเสียดทานในการไหล

$$\Delta v_x = v'\cos\theta - v = -v(1-\cos\theta)$$

$$\Delta v_y = v'\sin\theta - 0 = v\sin\theta$$

อัตราการไหลของมวล คือ $m' = \rho A v$

จาก FBD รวมของใบพัดและไอน้ำ (ซึ่งไม่คิดน้ำหนักของใบพัดและไอน้ำ)

$$\sum F_x = m'\Delta v_x \quad \Rightarrow \quad -F = \rho A v[-v(1-\cos\theta)]$$

$$\Rightarrow \quad F = \rho A v^2 (1-\cos\theta)$$

$$\sum F_y = m'\Delta v_y \quad \Rightarrow \quad R = \rho A v(v\sin\theta)$$

$$\Rightarrow \quad R = \rho A v^2 \sin\theta$$ **ตอบ**

ข) ในกรณีที่ใบพัดมีการเคลื่อนที่ ความเร็วสัมบูรณ์ของน้ำที่เข้าสู่ใบพัดคือ v และจากหลักการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ เราจะได้ว่า ความเร็วสัมบูรณ์ของไอน้ำที่ออกจากใบพัด คือ v′ จะเท่ากับผลบวกทางเวกเตอร์ของความเร็วของใบพัด u และความเร็วของไอน้ำเทียบกับใบพัด v - u ดังรูป

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 12 เลขหน้า 3/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ดังนั้นความเร็ว v' ในแนวแกน x คือ $v'\cos\beta = (v-u)\cos\theta + u$

$$\Delta v_X = [(v-u)\cos\theta + u] - v = -(v-u)(1-\cos\theta)$$

และความเร็ว v' ในแนวแกน y คือ $v'\sin\beta = (v-u)\sin\theta$

$$\Delta v_y = [(v-u)\sin\theta - 0] = (v-u)\sin\theta$$

อัตราการไหลของมวลที่ผ่านใบพัด (ซึ่งไม่คิดน้ำหนักของใบพัดและไอน้ำ)

$$\sum F_X = m'\Delta v_X \quad \Rightarrow \quad -F = \rho A(v-u)[-(v-u)(1-\cos\theta)$$

$$\Rightarrow \quad F = \rho A(v-u)^2(1-\cos\theta)$$

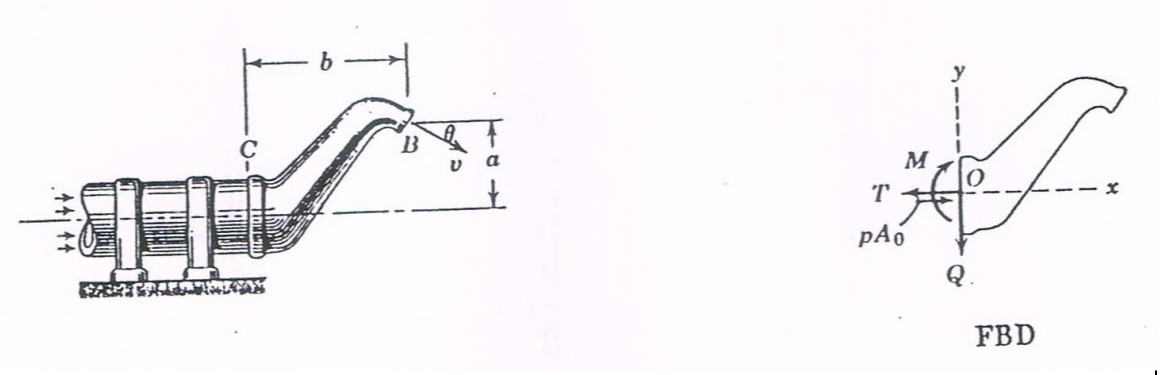
$$\sum F_y = m'\Delta v_y \quad \Rightarrow \quad R = \rho A(v-u)^2 \sin\theta$$ **ตอบ**

ข้อสังเกต : การแทนค่าความเร็วและแรงเราจะต้องคำนึงถึงเครื่องหมายและทิศทาง ด้วยเสมอ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 4/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 หัวฉีดดังรูป มีพื้นที่ทางออกที่ปลาย B เท่ากับ A และมีพื้นที่ทางเข้าที่ C เท่ากับ A_O ของเหลวที่จะเข้าหัวฉีด มีความดันเกจ P และพุ่งออกจากหัวฉีดด้วยความเร็ว v ในทิศทางดังรูป ถ้าของเหลวมีความหนาแน่นคงที่ ρ จงหา ความตึง T แรงเฉือน Q และโมเมนต์บิด M ของท่อที่ C



วิธีทำ : จาก FBD รวมของหัวฉีดและของเหลวในหัวฉีด (ซึ่งไม่คิดน้ำหนักของของเหลวในหัวฉีดและตัวหัวฉีด) จะมีแรงและโมเมนต์บิดที่จุดยึดกับท่อ C และยังมีแรงเนื่องจากความดันเกจ P ของของเหลวในท่อตรงทางเข้าของหัวฉีดด้วย

จาก $\sum F_X = m'\Delta v_X \Rightarrow P A_O - T = \rho A v (v\cos\theta - v_O)$

$$\Rightarrow T = PA_O + \rho A v^2 \left(\frac{A}{A_O} - \cos\theta\right)$$

จาก $\sum F_y = m'\Delta v_y \Rightarrow -Q = \rho A v (-v\sin\theta - 0)$

$$\Rightarrow Q = \rho A v^2 \sin\theta$$

จาก $\sum M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1)$

$$\Rightarrow M = \rho A v [(v_A \cos\theta + vb \sin\theta) - 0]$$ **ตอบ**

แรง T, Q และโมเมนต์บิด M ที่หาได้ คือ แรงและโมเมนต์บิดที่กระทำต่อหัวฉีด ดังนั้นแรงและโมเมนต์บิดที่กระทำต่อท่อ จะมีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงกันข้าม

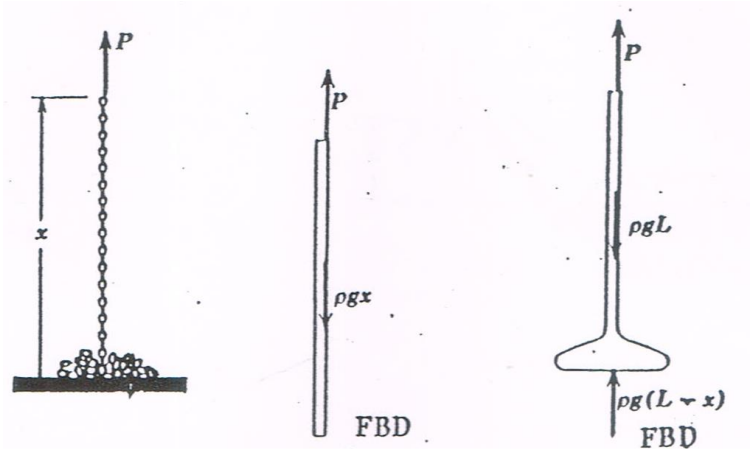
ข้อสังเกต : ของเหลวจะพุ่งออกจากหัวฉีด สู่บรรยากาศ ดังนั้น ความดันเกจที่ทางออกของหัวฉีดจึงมีค่าเป็นศูนย์ (ความดันสัมบูรณ์ = ความดันเกจ + ความดันบรรยากาศ)

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 5/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 . โซ่เส้นหนึ่งยาว L มีมวล ρ ต่อหนึ่งหน่วยความยาว ถูกดึงขึ้นด้วยแรง P โดยให้มีความเร็วคงที่ v จงหาแรง P ในเทอมของระยะ x และหาพลังงานที่สูญเสีย

ตอบ. [$P = \rho(gx + v^2)$, $\Delta E = \frac{1}{2}\rho L v^2$]



หลักการวิเคราะห์ :

1. หากพิจารณาความยาวโซ่ส่วนความยาว x เป็นระบบมวลจะเป็นระบบมวลแปรผัน
2. หากพิจารณาโซ่ส่วนความยาว x และส่วนที่กองอยู่บนพื้นเป็นระบบมวล ระเป็นระบบมวลคงที่

การคำนวณ :

1. หากพิจารณาเป็นระบบมวลแปรผัน

$$[\sum \vec{F} = m\vec{a} + \dot{m}_i\ (\vec{v} - \vec{v}_i) - \dot{m}_O\ (\vec{v} - \vec{v}_O)]_y$$

$$P - \rho g x = 0 + \rho v(v - 0) - 0$$

$$P = \rho(gx + v^2)$$ **ตอบ**

2. หากพิจารณาเป็นระบบมวลคงที่

$$[\sum \vec{F}_y = \dot{G}_y] \quad \Rightarrow \quad P - \rho g(L - x) - \rho g L = \frac{d(\rho x v)}{dt}$$

$$P - \rho g(L - x) - \rho g L = \rho(\dot{x} v + x \dot{v})$$

$$P = \rho(gx + v^2)$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 12 เลขหน้า 6/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

สมการการสูญเสียของพลังงาน คือ $U = \Delta T + \Delta v_g + \Delta E$

นั่นคือ $$U = \int P\,dx = \int_0^L (\rho g x + \rho v^2)dx = \frac{1}{2}\rho g L^2 + \rho v^2 L$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho L v^2$$

$$\Delta v_g = \rho g L \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\rho g L^2$$

แทนค่าลงในสมการ จะได้

$$\frac{1}{2}\rho g L^2 + \rho v^2 L = \rho L v^2 + \frac{1}{2}\rho g L^2 + \Delta E$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}\rho v^2 L$$ **ตอบ**

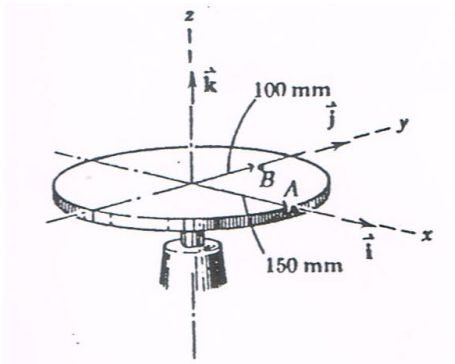
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 13 เลขหน้า 1/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1. จานกลมหมุนรอบแกนตั้งฉาก z ที่ขณะหนึ่ง ความเร็วของจุด B บนจาน คือ $\vec{v}_B = 0.4\vec{i}$ m/s และความเร่งในแนวสัมผัสของจุด ของ A คือ $\vec{a}_{At} = 1.8\vec{j}$ m/s จงหาความเร็วเชิงมุม $\vec{\omega}$ และ $\vec{a}_B$ ในรูปของเวกเตอร์ในขณะนั้น

หลักการวิเคราะห์ :

ใช้ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่เชิงเส้นของจุดบนเส้นและการเคลื่อนที่เชิงมุมของเส้นในรูปเวกเตอร์เพื่อหา $\vec{\omega}$ และ $\vec{a}_B$ ตามต้องการ



การคำนวณ :

จากสมการ $\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_B$

$$0.4\vec{i} = \vec{\omega} \times 0.1\vec{j}$$

$$\vec{\omega} = -4\vec{k}$$

และจากสมการ $\vec{a}_{At} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_B \quad \Rightarrow \quad 1.8\vec{j} = \vec{\alpha} \times 0.15\vec{i}$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = 12\vec{k}$$

$\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_B = \vec{\omega} \times \vec{v}_B + \vec{\alpha} \times \vec{r}_B$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_B = (-0.4\vec{k} \times 0.4\vec{i}) + (12\vec{k} \times 0.1\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad = -1.6\vec{j} - 1.2\vec{i} \text{ m/s}^2$$ **ตอบ**

ข้อสังเกต :

$\vec{\alpha}$ และ $\vec{\omega}$ จะมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบการเคลื่อนที่ เป็นไปตามกฎมือขวา ในที่นี้ $\vec{\omega}$ จะมีทิศทาง $-\vec{k}$ ส่วน $\vec{\alpha}$ นั้นจะมีทิศทาง $+\vec{k}$ ซึ่งทิศทางของ $\vec{\omega}$ จะดูได้จากทิศทางของ $\vec{v}_B$ ที่ทำให้ $\vec{\omega}$ หมุนตามเข็มนาฬิกา และทิศทางของ $\vec{\alpha}$ จะดูได้จากทิศทางของ $\vec{a}_{At}$ ที่ทำให้ $\vec{\alpha}$ หมุนทวนเข็มนาฬิกา

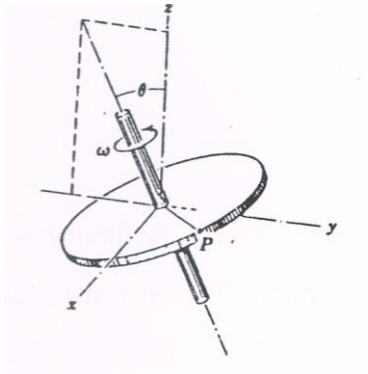
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 13 เลขหน้า 2/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. จานกลมหมุนด้วยความเร็วเชิงมุมคงที่ $\omega = 50$ rad/s รอบแกนตามรูป ซึ่งทำมุม $\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4}$ กับระนาบ y - z จงหาความเร็วและความเร่งของจุด P ในรูปของเวกเตอร์ที่ P มีตำแหน่งซึ่งกำหนดด้วยเวกเตอร์ $\vec{r} = 60\vec{i} + 64\vec{j} + 48\vec{k}$ mm

หลักการวิเคราะห์ :

เขียนความเร็วเชิงมุม ω ให้อยู่ในรูปของเวกเตอร์ แล้วหาความเร็ว $\vec{v}$ ได้จากสมการ $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ และความเร่ง $\vec{a} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$ หรือ $\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ ($\vec{\alpha} = 0$) เนื่องจาก $\vec{\omega}$ = constant



การคำนวณ :

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = 50[-\frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k} \quad \text{rad/s}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = -30\vec{j} + 40\vec{k} \quad \text{rad/s}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_1 = 60\vec{i} + 64\vec{j} + 48\vec{k} \quad \text{mm}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -30 & 40 \\ 60 & 64 & 48 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - 2.4\vec{j} + 1.8\vec{k} \quad \text{m/s} \qquad \textbf{ตอบ}$$

และจาก

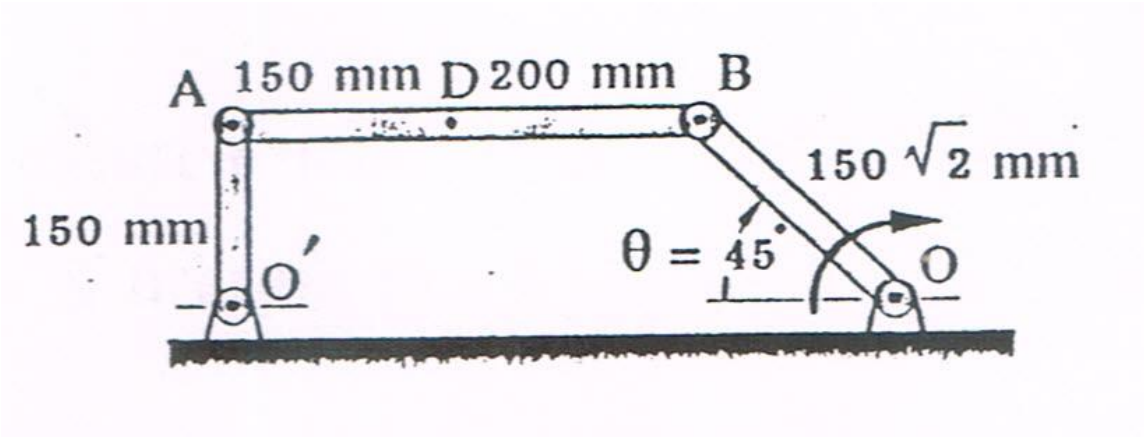
$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -30 & 40 \\ -4 & 2.4 & 1.8 \end{vmatrix} = -150\vec{i} - 160\vec{j} + 120\vec{k} \quad \text{m/s}^2 \quad \textbf{ตอบ}$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 13 เลขหน้า 3/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : แขน OB ของกลไกมีความเร็วเชิงมุมตามเข็มนาฬิกาเท่ากับ 10 rad/s ในตำแหน่งดังรูป เมื่อ $\theta = 45^{\circ}$ จงหาความเร็วของ A ความเร็วของ D และความเร็วเชิงมุมของแขน AB



วิธีทำ :

พิจารณากลไกดังรูป ซึ่งประกอบด้วยวัตถุเกร็งจำนวน 3 ชิ้น คือ

แขน O′A มีการหมุนรอบจุด O′

แขน OB มีการหมุนรอบจุด O

แขน AB มีการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

จุดต่อ A ถือเป็นจุดอยู่บนทั้งแขน O′A และแขน AB และจุดต่อ B ถือเป็นจุดอยู่บนทั้งแขน OB และ แขน AB ดังนั้น แนวความเร็วของ A จะตั้งฉากกับ O′A และแนวความเร็วของ B จะตั้งฉากกับ OB

การหาจุดหมุนชั่วขณะ กระทำโดยการลากเส้นตั้งฉากกับแนวความเร็วจาก A และ B ตามลำดับ ไปตัดกันจะได้จุด C เป็นจุดหมุนชั่วขณะ ดังแสดงในรูป ซึ่งระยะ $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ และ $\overline{DC}$ หาได้จากขนาดและรูปร่างของกลไกที่กำหนดให้ สำหรับความเร็วเชิงมุมของ BC ซึ่งถือเป็นเส้นบนส่วนต่อของแขน AB ก็จะเท่ากับความเร็วเชิงมุมของเส้น AC และ DC ด้วย

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 13 เลขหน้า 4/16

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

จากสมการ $\omega = \frac{v}{r}$

$$\Rightarrow \quad \omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB}\,\omega_{OC}}{\overline{BC}} = \frac{(150)(\sqrt{2})(10)}{(350)(\sqrt{2})} = 4.29 \text{ rad/s}$$

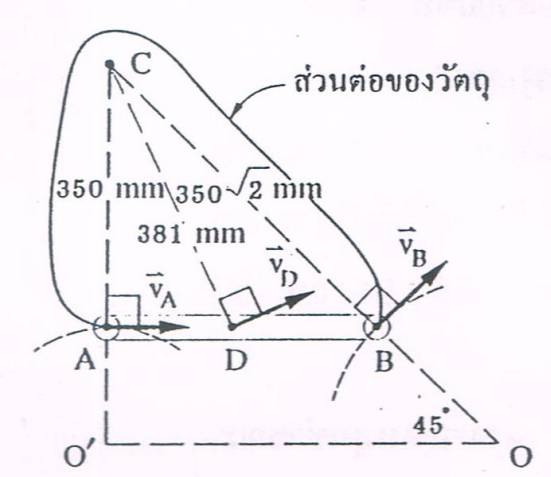
(ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)

ดังนั้นความเร็วของ A และ D ก็จะหาได้จากสมการ $v = r\omega$

$$\Rightarrow \quad v_A = (0.350)(4.29) = 1.501 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad v_D = (0.381)(4.29) = 1.630 \text{ m/s}$$

และมีทิศทางดังแสดงในรูป **ตอบ**

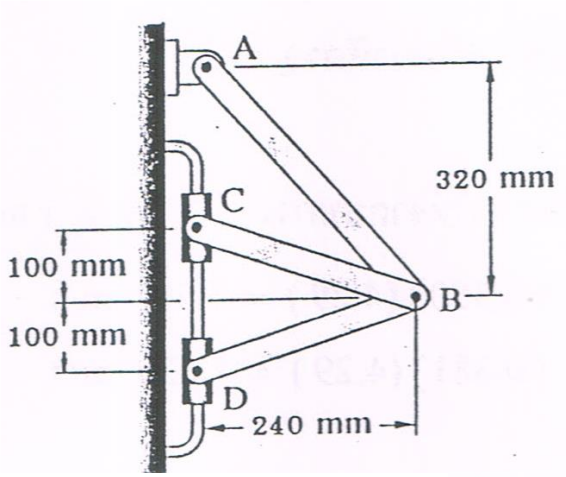


รูปภาพในหน้าที่ 168 (NEW)

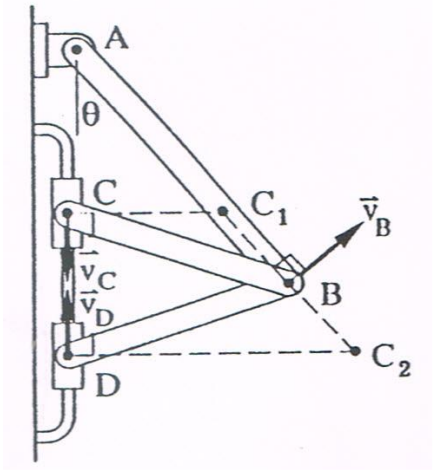
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 13 เลขหน้า 5/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4 : ปลอก C และ D เลื่อนบนราวในแนวดิ่ง ถ้าปลอก C มีความเร็ว 660 mm/s ในทิศทางลง จงหาความเร็วของ D และความเร็วเชิงมุมของแขน AB ในขณะนั้น



วิธีทำ :



พิจารณากลไกตามรูป ประกอบด้วยแขนสามชิ้น คือ

แขน AB มีกรหมุนรอบจุด A

แขน BC มีการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

แขน BD มีการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

และจุดต่อ B เป็นจุดที่อยู่บนแขน AB, BC และ BD

พิจารณาความเร็วของจุดต่าง ๆ เพื่อหาจุดหมุนชั่วขณะ

v_B อยู่ในแนวตั้งฉากกับแขน AB เนื่องจากแขน AB หมุนรอบจุด A

v_C อยู่ในแนวดิ่ง

v_D อยู่ในแนวดิ่ง

เมื่อลากเส้นตั้งฉากกับแนว v_C และ v_B ไปตัดกันที่จุด C_1 เป็นจุดหมุนชั่วขณะของแขน BC

เมื่อลากเส้นตั้งฉากกับแนว v_B และ v_D ไปตัดกันที่จุด C_2 ซึ่งเป็นจุดหมุนชั่วขณะของแขน BD

ซึ่งมุมและระยะต่าง ๆ จะหาได้ดังนี้

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 13 เลขหน้า 6/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

$$\tan\theta = \frac{240}{320} \Rightarrow \theta = 36.87^{o} \quad , \quad \overline{AB} = \frac{320}{\cos\theta} = 400 \text{ mm}$$

$$\overline{AC_1} = \frac{220}{\cos\theta} = 275 \text{ mm} \quad , \quad \overline{AC_2} = \frac{420}{\cos\theta} = 525 \text{ mm}$$

$$\overline{C_1C} = \overline{AC_1}\sin\theta = 165 \text{ mm} \quad , \quad \overline{C_1B} = \overline{AB} - \overline{AC_1} = 125 \text{ mm}$$

$$\overline{C_1B} = \overline{AB} - \overline{AC_1} = 125 \text{ mm} \quad , \quad \overline{C_2B} = \overline{AC_2} - \overline{AB} = 125 \text{ mm}$$

$$\overline{C_2D} = \overline{AC_2}\sin\theta = 315 \text{ mm}$$

จุดหมุนชั่วขณะ C_1

$$\Rightarrow \quad \omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{C_1B}} = \frac{v_C}{\overline{C_1C}} \Rightarrow v_B = \frac{0.660}{165}(125) = 0.5 \text{ m/s}$$

จุดหมุนชั่วขณะ C_2

$$\Rightarrow \quad \omega_{BD} = \frac{v_D}{C_2D} = \frac{v_B}{\overline{C_2B}} \Rightarrow v_D = \frac{0.5}{125}(315) = 1.26 \text{ m/s} \uparrow$$

แขน AB

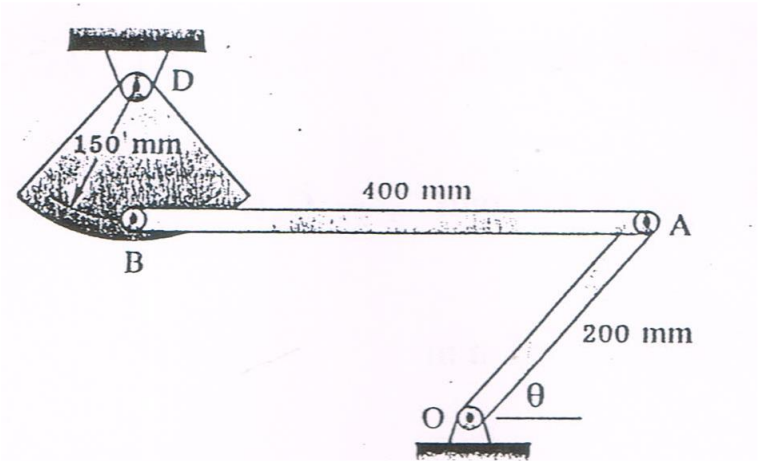
$$\Rightarrow \quad \omega_{AB} = \frac{v_B}{\overline{AB}} = \frac{0.5}{0.4} = 1.25 \text{ rad/s (ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา)}$$

ตอบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 1/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : ถ้าแขน OA มีความเร็วเชิงมุมคงที่เท่ากับ 4 rad/s ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ในตำแหน่ง เมื่อ $\theta = 45^{\circ}$ ซึ่งแขน AB อยู่ในแนวระดับและแนว BD อยู่ในแนวดิ่ง จงหาความเร่งเชิงมุมของจาน DB



วิธีทำ :

พิจารณาระบบวัตถุเกร็งตามรูป ซึ่งประกอบด้วยวัตถุเกร็งสามชิ้น คือ

จาน DB มีการหมุนรอบจุด O

แขน OA มีการหมุนรอบจุด O

แขน AB มีการเคลื่อนที่แบบทั่วไปในระนาบ

จุดต่อ A เป็นจุดที่อยู่บนแขน OA และแขน AB และจุดต่อ B เป็นจุดอยู่บนจาน DB และแขน AB จากสมการของความเร็วสัมพัทธ์ของวัตถุเกร็ง AB โดยเลือกจุด B เป็นจุดอ้างอิง จะได้ว่า

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B + \bar{v}_{A/B}$$

$v_A = \overline{OA}\,\omega_{OA} = 0.2(4) = 0.8$ m/s ทิศทางตั้งฉากกับ OA ไปในทาง ω_{OA}

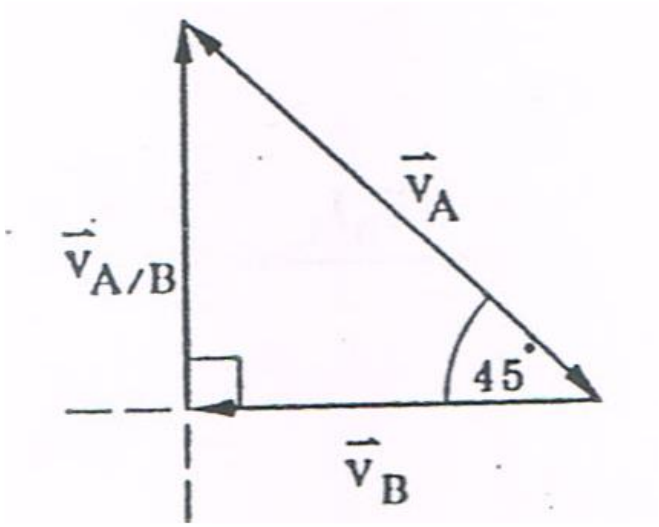
$v_B = \overline{DB}\,\omega_{DB}$ ทิศทางตั้งฉากกับ DB

$v_{A/B} = \overline{AB}\,\omega_{AB}$ ทิศทางตั้งฉากกับ AB

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 2/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

เขียนผังเวกเตอร์ และจากผังดังกล่าวจะได้



$$v_B = v_{A/B} = 0.8 \sin 45^o = 0.566 \text{ m/s}$$

$$\omega_{DB} = \frac{0.566}{0.15} = 3.77 \text{ rad/s} \quad \text{ทิศทางตามเข็มนาฬิกา}$$

$$\omega_{AB} = \frac{0.566}{0.4} = 1.415 \text{ rad/s} \quad \text{ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา}$$

จากสมการความเร่งสัมพัทธ์ของวัตถุเกร็ง AB โดยเลือกจุด B เป็นจุดอ้างอิงจะได้ว่า

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B + (\vec{a}_{A/B})_n + (\vec{a}_{A/B})_t$$

เนื่องจากจุด A ถือเป็นจุดอยู่บนแขน OA ซึ่งหมุนรอบจุด O ด้วย จะได้

$$(\vec{a}_A)_n = \overline{OA}\,\omega_{OA}^2 = 0.2(4)^2 = 3.2 \text{ m/s}^2 \quad \text{ทิศทางจาก } A \to O$$

$$(\vec{a}_A)_t = \overline{OA}\,\alpha_{OA} = 0 \quad \text{เนื่องจาก } \omega_{OA} = \text{const.}$$

สำหรับจุด B นั้น ก็ถือว่าเป็นจุดอยู่บนจาน DB ซึ่งหมุนรอบจุด D ด้วย จะได้

$$\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_n + (\vec{a}_B)_t$$

$$(\vec{a}_B)_n = \overline{DB}\,\omega_{DB}^2 = 0.15(3.77)^2 = 2.13 \text{ m/s}^2 \quad \text{ทิศทางจาก } B \to D$$

$$(\vec{a}_B)_t = \overline{DB}\,\alpha_{DB} \quad \text{ทิศทางตั้งฉากกับ DB}$$

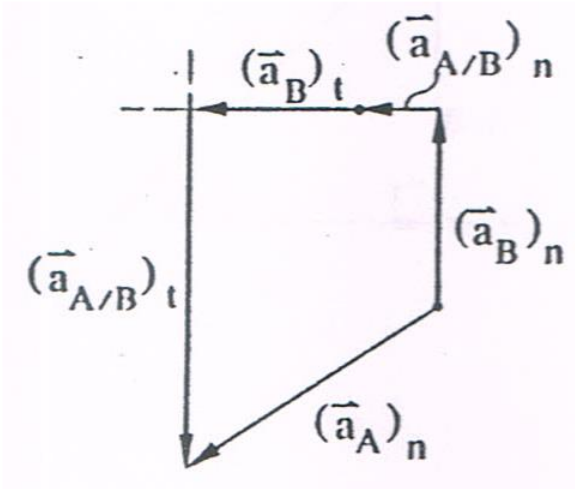
$$(\vec{a}_{A/B})_n = \overline{AB}\,\omega_{AB}^2 = 0.4(1.415)^2 = 0.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{ทิศทางจาก } A \to B$$

$$(\vec{a}_{A/B})_t = \overline{AB}\,\alpha_{AB} \quad \text{ทิศทางตั้งฉากกับ AB}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 14 เลขหน้า 3/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

เขียนผังเวกเตอร์ และจากผังดังกล่าวจะได้



$$(a_B)_t = (a_A)_n \sin 45^o - (a_{A/B})_n = 2.263 - 0.8 = 1.463 \text{ m/s}^2$$

ทิศทางจาก $A \rightarrow O$

$$(a_{A/B})_t = (a_B)_n + (a_A)_n \cos 45^o = 2.13 + 2.263 = 4.393 \text{ m/s}^2$$

ดังนั้น

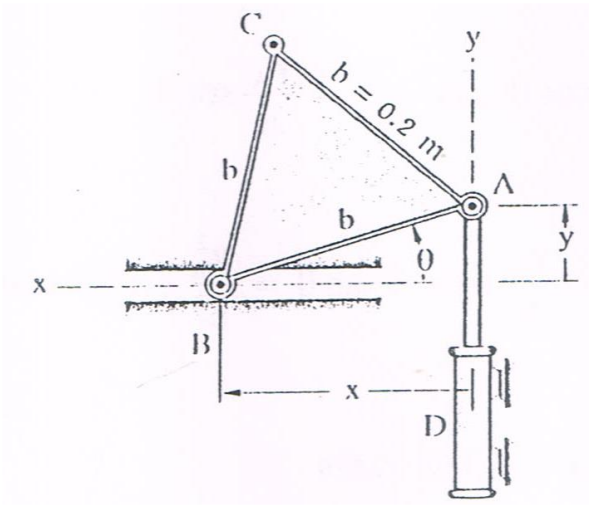
$$\alpha_{DB} = \frac{0.463}{0.15} = 9.75 \text{ rad/s}^2$$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ตอบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 4/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 : การเคลื่อนที่ของแผ่นสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC ถูกควบคุมโดยกระบอกสูบไฮดรอลิกส์ D ถ้าก้านสูบในกระบอกเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงที่เท่ากับ 0.3 m/s จงหาความเร็วและความเร่งของจุดศูนย์กลางของลูกกลิ้ง B ในร่องแนวระดับ และความเร็วและความเร่งเชิงมุมของขอบ CB เมื่อ $\theta = 30^o$



วิธีทำ :

กำหนดพิกัด x - y ตามรูป จะได้

$$v_A = \dot{y} = 0.3 \text{ m/s} \quad \text{และ} \quad a_A = \ddot{y}$$

จากสมการ

$$x^2 + y^2 = b^2$$

ดังนั้น $x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y}$

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{x} - \frac{y}{x}\ddot{y}$$

แทนค่า $y = b\sin\theta, x = b\cos\theta$ และ $\ddot{y} = 0$

จะได้ $v_B = -0.3(\frac{1}{\sqrt{3}}) = -0.1732 \text{ m/s}$

$$a_B = \frac{(0.3)^2 (2/\sqrt{3})^3}{0.2} = -0.693 \text{ m/s}^2$$

เครื่องหมายเป็นบวกแสดงว่าความเร็วและความเร่งของ B มีทิศไปทางขวา เนื่องจาก x เป็นบวกไปทางซ้าย

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 5/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

การเคลื่อนที่เชิงมุมของ CB จะเหมือนกับการเคลื่อนที่เชิงมุมของทุก ๆ เส้นบนแผ่น ซึ่งรวมถึงเส้น AB ด้วย จากรูปจะได้ว่า

$$y = b\sin\theta$$

ดังนั้น

$$\frac{dy}{dt} \Rightarrow \dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta \ , \ \omega = \dot{\theta} = \frac{v_A}{b}\sec\theta$$

และ

$$\frac{d\dot{y}}{dt} \Rightarrow \ddot{y} = \alpha = \frac{v_A}{b}\dot{\theta}\sec\theta\tan\theta = \frac{v_A^2}{b^2}\sec^2\theta\tan\theta$$

แทนค่าจะได้

$$\omega = (\frac{0.3}{0.2})(\frac{2}{\sqrt{3}}) = 1.732 \text{ rad/s}$$

และ

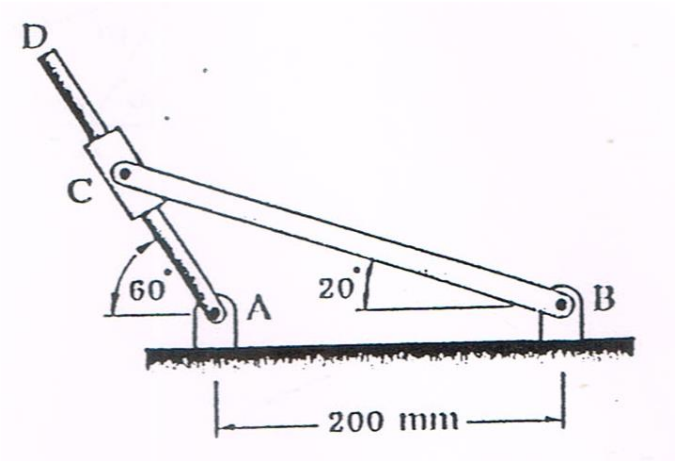
$$\alpha = \left(\frac{0.3}{0.2}\right)^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1.732 \text{ rad/s}^2$$ **ตอบ**

(ω และ α มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เนื่องจากมีค่าเป็นบวกในทางบวกของการวัดมุม θ)

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 6/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : แขน AD และแขน BC ต่อโยงกันด้วยปลอกเลื่อน C ถ้าความเร็วสัมพัทธ์ของปลอกเลื่อนเมื่อเทียบกับแขน AD เท่ากับ 225 mm/s ในทิศทางพุ่งออกจากจุด A และมีค่าคงที่ จงหาความเร็วเชิงมุมของแขนทั้งสอง



วิธีทำ

พิจารณาระบบวัตถุเกร็งซึ่งประกอบไปด้วยวัตถุเกร็ง 2 ชิ้น คือ

แขน AD มีการหมุนรอบจุด A

แขน BC มีการหมุนรอบจุด B

จุด C บนแขน BC ติดกับปลอกเลื่อนที่เคลื่อนที่ไปบนแขน AD ซึ่งหมุนไป ดังนั้นจึงวิเคราะห์การเคลื่อนที่แบบสัมพัทธ์เทียบกับแกนอ้างอิงหมุน โดยกำหนดแกนอ้างอิง x - y หมุน ไปพร้อมกับแขน AD เทียบกับจุด C ดังนั้นสมการของความเร็วสัมพัทธ์ เทียบกันแกนหมุดจะได้ดังนี้

$$\bar{v}_C = \bar{v}_P + \bar{v}_{C/P}$$

$v_C = \overline{BC}\,\omega_{BC}$ ทิศทางตั้งฉากกับ BC

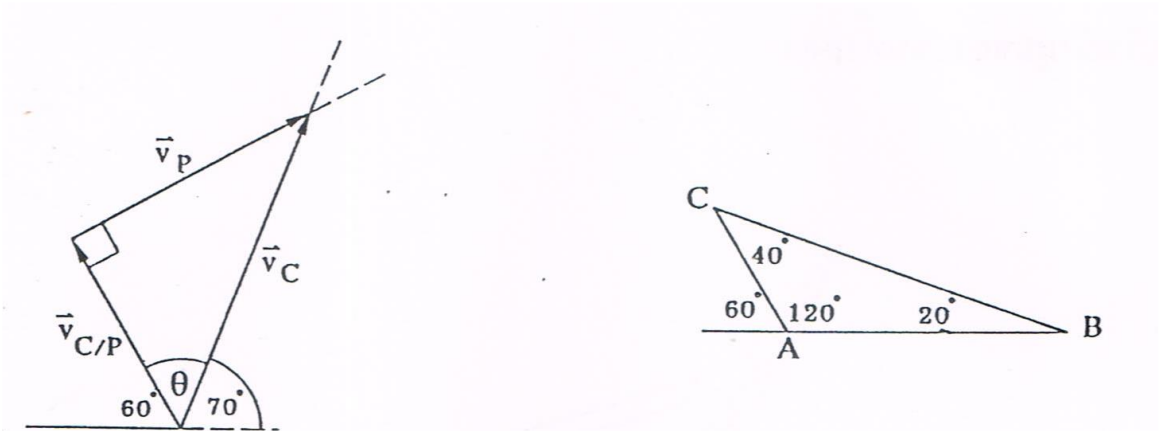
$v_P = \overline{AP}\,\omega_{AD}$ ทิศทางตั้งฉากกับ AP

$v_{C/P} = 25$ mm/s ทิศทางพุ่งออกจาก A

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 14 เลขหน้า 7/7

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

เขียนผังของเวกเตอร์จะได้



$$\theta = 180 - 60 - 70 = 50^{o}$$

$$v_C = \frac{v_{C/P}}{\cos\theta} = \frac{225}{\cos 50} = 350 \text{ mm/s}$$

$$v_P = (v_{C/P})\tan\theta = 225\tan 50^{o} = 268.1 \text{ mm/s}$$

และจากกฎของไซน์

$$\frac{AC}{\sin 20^{o}} = \frac{BC}{\sin 120^{o}} = \frac{200}{\sin 40}$$

จะได้

$$AC = 106.4 \text{ mm} \quad \text{และ} \quad BC = 269.5 \text{ mm}$$

ดังนั้น

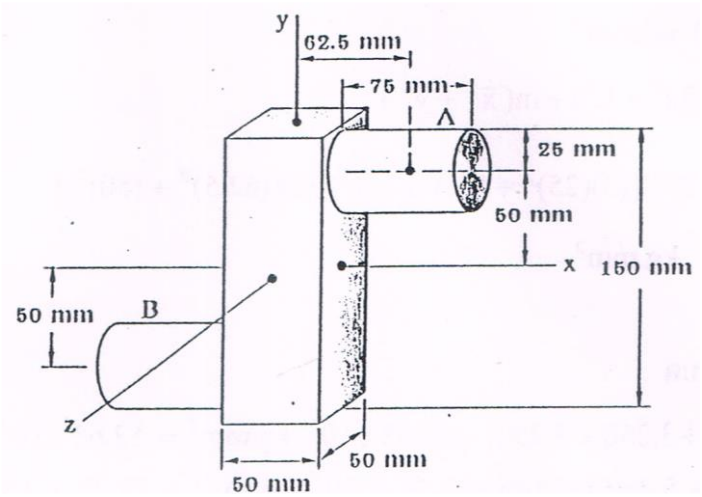
$$\omega_{AD} = \frac{268.1}{106.4} = 2.52 \text{ rad/s}$$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

และ $$\omega_{BC} = \frac{350}{269.5} = 1.30 \text{ rad/s}$$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 15 เลขหน้า 1/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 เหล็กปั๊มขึ้นรูป มีรูปทรงประกอบด้วยแท่งปริซึมหน้าตัดสี่เหลี่ยมขนาด 150 x 50 x 50 mm. และแท่งทรงกระบอกเส้นผ่านศูนย์กลาง 50 mm. และยาว 75 mm. จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกน x , y และ z



วิธีทำ :

พิจารณาแท่งปริซึม

ปริมาตร $V_1 = (50)^2\,(150) = 0.375 \times 10^{-3}\ m^3$

มวล $m_1 = \rho V_1 = (7{,}850)(0375 \times 10^{-3}) = 2.94\ kg$

พิจารณาแท่งทรงกระบอกทั้งสองชิ้น

ปริมาตร $V_2 = \pi r^2 h = \pi (25)^2\,(75)\ m^3$

มวล $m_2 = \rho V_2 = (7{,}850)(01473 \times 10^{-3}) = 1.156\ kg$

คำนวณหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวล

พิจารณาแท่งปริซึม

$$I_x = I_z = \frac{1}{12}(2.94)[\,(150)^2 + (50)^2\,] = 6{,}125\ kg.mm^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}(2.94)[\,(50)^2 + (50)^2\,] = 1{,}225\ kg.mm^2$$

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 15 เลขหน้า 2/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

พิจารณาแท่งทรงกระบอกทั้งสอง

$$I_x = \frac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \frac{1}{2}(1.156)(25)^2 + (1.156)(50)^2 = 3{,}250 \text{ kg.mm}^2$$

$$I_y = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m\bar{x}^2 = \frac{1}{12}(1.156)[(3)(25)^2 + (75)^2] + (1.156)(625)^2$$

$$= 5{,}240 \text{ kg.mm}^2$$

$$I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2) + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

$$= \frac{1}{12}(1.156)[(3)(25)^2 + (75)^2] + (1.156)[(62.5)^2 + (50)^2]$$

$$= 8{,}130 \text{ kg.mm}^2$$

พิจารณารูปผสมทั้งหมด

$$I_x = 6{,}125 + 3{,}250 + 3{,}250 = 12.63 \times 10^3 \text{ kg.mm}^2 = 12.63 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

$$I_y = 1{,}225 + 5{,}240 + 5{,}240 = 1.71 \times 10^3 \text{ kg.mm}^2 = 11.71 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

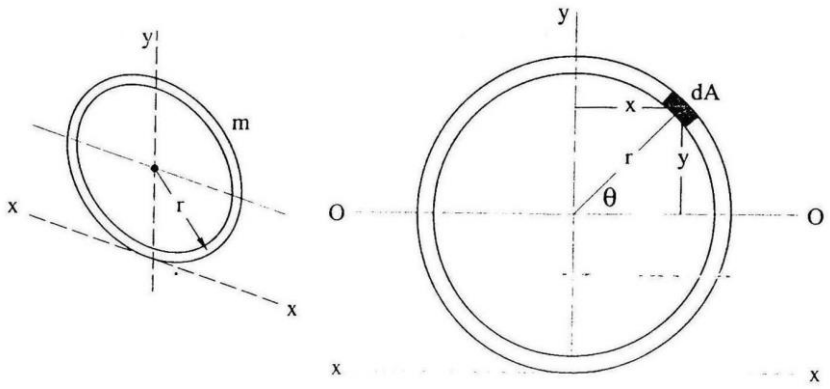
$$I_z = 6{,}125 + 8{,}130 + 8{,}130 = 22.4 \times 10^3 \text{ kg.mm}^2 = 22.4 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^2$$

ตอบ

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 15 เลขหน้า 3/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2 จงหาโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของวงแหวนมวล m รัศมี r รอบแกน x –x



วิธีทำ

I_{O-O} เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลรอบแกนผ่านจุดศูนย์กลางมวล

ถ้าให้ ρ = ความหนาแน่นของวงแหวน

t = ความหนาของวงแหวน

$dm = \rho t\, dA$

$= \rho t r\, d\theta$

$I_{O-O} = \int y^2 dm$

$= \int_0^{2\pi} (r\sin\theta)^2\, \rho t r\, d\theta$

$= \rho t r^3 \int_0^{2\pi} (\sin\theta)^2\, d\theta$

$= \rho t r^3 \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$

$= \rho t r^3 \pi$

แต่ $m = 2\pi r \rho t$

ดังนั้น $I_{O-O} = \frac{1}{2} m r^2$

การหา I_{X-X} ต้องอาศัยการย้ายแกน

$I_{X-X} = I_{O-O} + md^2$

$= \frac{1}{2} m r^2 + mr^2$

$= \frac{3}{2} m r^2$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 4/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อสังเกต

การหาค่า I_{O-O} สามารถที่จะหาจากส่วนของวงกลมวงแหวนเพียง $\frac{1}{4}$ ส่วนหรือ $\frac{1}{2}$ ส่วนได้ เช่น

คิดเพียง $\frac{1}{4}$ ส่วนของวงแหวน

$$I_{O-O} = \int_0^{\frac{2}{\pi}} (r\sin\theta)^2 \, \rho t r \, d\theta = \frac{1}{8} mr^2$$

ถ้าคิดเต็มวงต้องเอา 4 เท่าคูณ

$$I_{O-O} = 4(\frac{1}{8} mr^2) = \frac{1}{2} mr^2$$

คิดเพียง $\frac{1}{2}$ ส่วนของวงแหวน

$$I_{O-O} = \int_0^{\pi} (r\sin\theta)^2 \, \rho t r \, d\theta = \frac{1}{4} mr^2$$

ถ้าคิดเต็มวงต้องเอา 2 เท่าคูณ

$$I_{O-O} = 2(\frac{1}{4} mr^2) = \frac{1}{2} mr^2$$

ทั้งนี้ เนื่องจากความสมมาตรของรูปทรงวัตถุที่พิจารณา

อีกประการหนึ่งในการหาค่าโมเมนต์ความเฉื่อยของมวลของวงแหวน สามารถหาได้จากตารางค่ามาตรฐาน

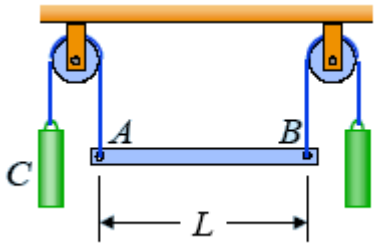
I_{O-O} ของทรงกระบอกกลวง $\frac{1}{2} mr^2 + \frac{1}{3} mr^2$ แต่วงแหวนเป็นค่าขอบของทรงกระบอกกลวงไม่มีความยาว

ดังนั้น $I_{O-O} = \frac{1}{2} mr^2$ **ตอบ**

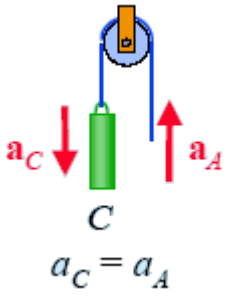
ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 15 เลขหน้า 5/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 บาร์ AB มีน้ำหนัก W ถูกทำให้สมดุลโดยตุ้มน้ำหนัก 2 ก้อน ซึ่งแต่ละก้อนมีมวลเท่ากับ $\frac{1}{2}$W ถ้าสายเคเบิ้ล B ขาด จงหาความเร่งของจุด A และ ความเร่งของจุด B



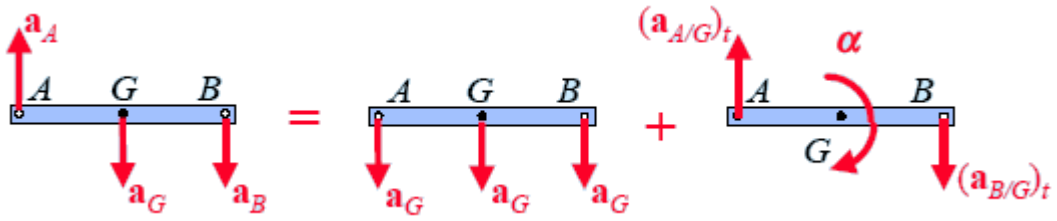
(ก)



(ข)

วิธีทำ

เขียน Free body diagram



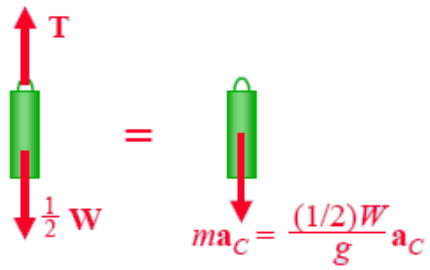
(ค)

จากภาพ (ค) จะได้ความสัมพันธ์ตามสมการดังต่อไปนี้

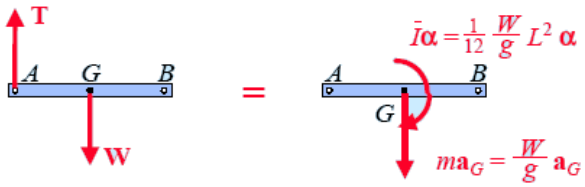
$$a_A = a_G + a_{A/G} \quad \text{และ} \quad a_B = a_G + a_{B/G}$$

พิจารณาในแนวแกน y ((+↓) จะได้

$$-a_A = a_G - \frac{L}{2}\alpha \quad \text{และ} \quad a_B = a_G + \frac{L}{2}\alpha$$



(ง)



(จ)

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 15 เลขหน้า 6/6

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

จากภาพ (ง)

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow \frac{1}{2}W - T = \frac{(1/2)W}{g}$$

เนื่องจาก $a_C = a_A$

ดังนั้น $T = \frac{1}{2}W - \frac{W}{2g}(a_A)$

จากภาพ (จ)

$$+\downarrow \sum F_y = ma_y \Rightarrow W - T = \frac{W}{g}a_G$$

$$+\circlearrowright \sum F_y = ma_y \Rightarrow T(\frac{1}{2}L) = \frac{1}{12}\left(\frac{W}{g}\right)(L)^2\alpha$$

จากสมการการเคลื่อนที่ทั้งสามสมการ คือ

$$T = \frac{1}{2}W - \frac{W}{2g}(a_A) \Rightarrow W - T = \frac{W}{g}a_G \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}L\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{W}{g}\right)(L)^2\alpha$$

และจากสมการ

$$-a_A = a_G - \frac{L}{2}\alpha$$

จากการแก้สมการจะได้

$$T = \frac{1}{3}W \quad , \quad \alpha = \frac{2g}{L} \quad , \quad a_G = \frac{2}{3}g$$

ดังนั้น $-a_A = \frac{2}{3}g - \frac{(2g/\alpha)}{2}\alpha = \frac{2}{3}g - g$

$$a_A = \frac{1}{3}g$$ **ตอบ**

หาความเร่งของจุด B

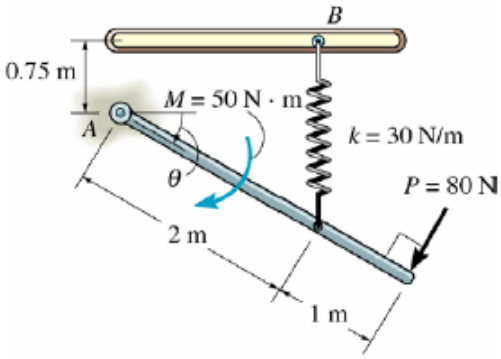
$$a_B = a_G + \frac{L}{2}\alpha \quad \Rightarrow \quad a_B = \frac{2}{3}g\downarrow + (\frac{L}{2})(\frac{2g}{L})$$

$$\Rightarrow \quad a_B = \frac{5}{3}g\downarrow$$ **ตอบ**

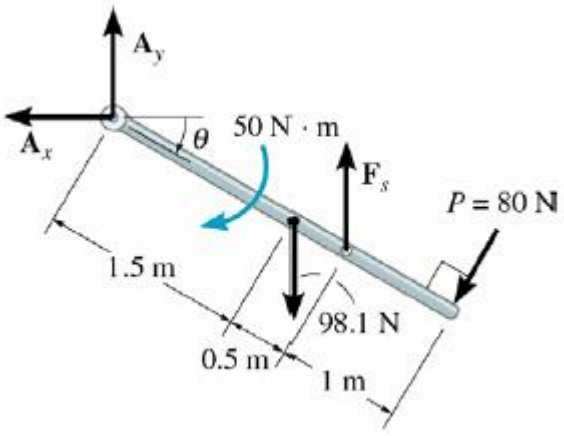
ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 16 เลขหน้า 1/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : กลไกดังแสดงในภาพมีมวล m =10 kg อยู่ภายใต้การกระทำของโมเมนต์คู่ควบ M = 50 N.m และมีแรง P = 80 N กระทำที่ปลายของแขนของกลไกดังแสดงในภาพ ถ้าสปริงมีค่า k = 30 N/m และในขณะที่มุม θ = 0 องศานั้น สปริงยืดจากระยะปกติเท่ากับ 0.5 m จงหางานสุทธิของกลไกนี้เมื่อมุม θ = 90 องศา



(A)



(B)

วิธีทำ พิจารณาจากภาพ (B) งานเนื่องจากน้ำหนัก

$$U_W = -W\Delta y \quad \Rightarrow \quad U_W = (10)(9.81)(1.5) = 147.2\,J$$

งานเนื่องจากโมเมนต์คู่ควบ

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1) \quad \Rightarrow \quad U_M = 50\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 78.5\ J$$

งานเนื่องจากแรงของสปริง

โดยพิจารณาเมื่อ θ = 0 องศา ระยะยืดของสปริง $s_1 = (0.75 - 0.5) = 0.25$ m

และพิจารณาเมื่อ θ = 90 องศา ระยะยืดของสปริง $s_2 = (2 + 0.75) - 0.5 = 2.25$ m

$$U_S = -\frac{1}{2}\left(ks_2^2 - ks_1^2\right)$$

$$U_S = -\frac{1}{2}\left[30\,(2.25)^2 - 30\,(0.25)^2\right] = -75.0\ J$$

งานเนื่องจากแรงภายนอก

$$U_F = (F_C\cos\theta)\,s$$

$$U_P = (80\,N)\left(\frac{\pi}{2}\right)(3) = 377.0\ J$$

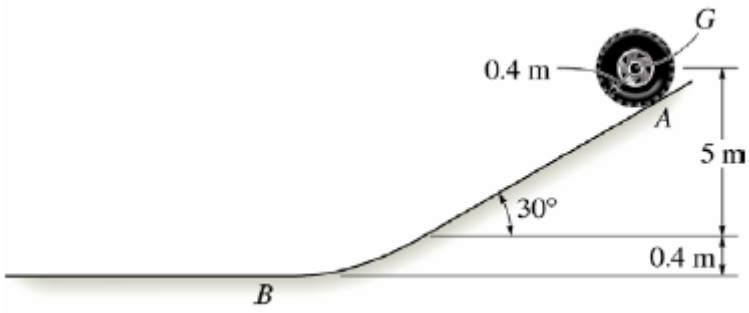
ดังนั้นงานสุทธิที่ได้จากการเคลื่อนที่ของกลไกนี้จะมีค่าเท่ากับ

$$U_W = 1472J + 78.5J + 377.0J = 528\ J$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 16 เลขหน้า 2/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. ล้อยางของรถยนต์อันหนึ่งมีมวล 7 kg และมีรัศมีไจเรชั่น k_G = 0.3 m ถ้าล้อยางนี้เคลื่อนที่ลงมาจากตำแหน่งสูงสุด จงหาค่าความเร็วเชิงมุมของล้อยางเส้นนี้เมื่อเคลื่อนที่มาถึงตำแหน่ง B



วิธีทำ

จากสมการ $v_G = \omega \times r$

ดังนั้น $v_G = (0.4\,\text{m}) \times \omega$ …(1)

พิจารณาการเคลื่อนที่ของล้อยางจากตำแหน่ง A มาที่ตำแหน่ง B

$$T_A + v_A = T_B + v_B \quad \text{…(2)}$$

เมื่อ

$$v_A = 0 \text{ m/s} \quad \text{…(3)}$$

$$T_B = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \omega^2 \quad \text{…(4)}$$

แทนค่าลงในสมการจะได้

$$0 + (7 \times 9.81) \times (5) = \frac{1}{2} \times (7) \times (0.4\omega 0^2 + \frac{1}{2} \times (7 \times 0.3^2)(\omega^2) \quad \text{….(5)}$$

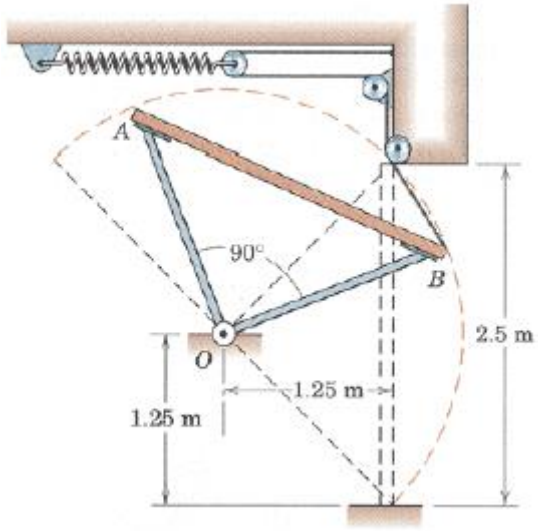
จากการแก้สมการจะได้

ω = 19.8 rad/s **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 16 เลขหน้า 3/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3 : ประตูโรงรถ AB มีขนาด 2.5 x 5 m (หนาเท่ากันตลอดทั้งแผ่น) และมีมวล 200 kg ใช้สปริงดึงที่ขอบด้านบนข้างละอัน เมื่อประตูเปิดอยู่ในแนวระดับ สปริงจะไม่ถูกยืด จงหาค่า k ของสปริงแต่ละอันที่จะทำให้ความเร็วเชิงมุมของประตูมีค่าไม่เกิน 1.5 rad/s เมื่อขอบ B กระทบพื้นพอดี



วิธีทำ

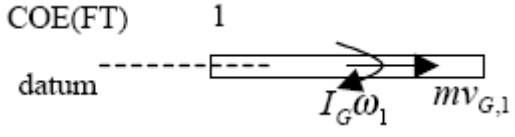
จากสมการงานและพลังงาน $U_F = U_T + U_W + U_S$

ก) หางานเนื่องจากแรงภายนอก

$U_F = 0$ เนื่องจากปัญหาในข้อนี้ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

ข) หาพลังงานเนื่องจากการเปลี่ยนแปลงความเร็ว (พลังงานจลน์)

เนื่องจากประตู AB มีการหมุนแบบหมุนรอบแกนคงที่ดังนั้นพลังงานจลน์จะหาได้จากสมการดังต่อไปนี้



$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

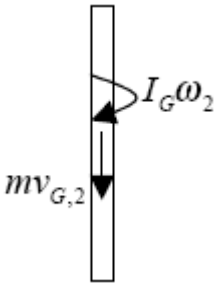
ดังนั้น

$$T_1 = \frac{1}{2} I_O \omega^2 = 0$$

เนื่องจากยังไม่มีการเคลื่อนที่

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 16 เลขหน้า 4/4

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน



$$T_2 = \frac{1}{2} \text{ x } 200 \text{ x } [(1/12)(25)^2 + (1.25)^2] \, (1.5)^2$$

$$= 469 \text{ J}$$

ค) หางานเนื่องจากน้ำหนักของวัตถุ

จากสมการ $\Rightarrow U_W = -W\Delta y$

ดังนั้น $U_W = mg(y_2 - y_1)$

$= (200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)(1.25 - 2.50)$

$= -2{,}453 \text{ J}$

ง) หางานเนื่องจากแรงของสปริง

จากสมการ $\Rightarrow U_S = -\frac{1}{2}\left(ks_2^2 - ks_1^2\right)$

จากการพิจารณาข้อมูลดังแสดงในภาพจะพบว่า $s_1 = 0$ m และ $s_2 = 1.25$ m

ดังนั้น $U_S = 2\left[\frac{1}{2}(k)(1.25)^2 - 0\right]$

$= 1.563(k)$ J

แทนค่า

$U_F = U_T + U_W + U_S$

$0 = 469 \text{ J} + (-2{,}453 \text{ J}) + 1.563(k)$

$k = (2{,}453 - 469) / 1.563$

$k =$

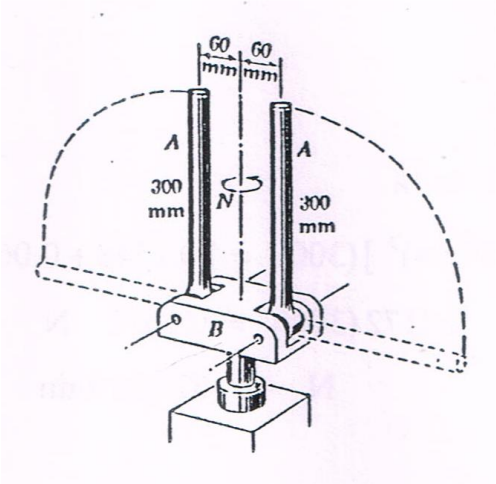
แก้สมการจะได้

$k = 1{,}269.35$ N/m **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 17 เลขหน้า 1/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 1 : แท่งวัตถุ A มีขนาดสม่ำเสมอ และมีความยาว 300 mm จำนวน 2 อัน ดังแสดงในภาพ โดยแต่ละแท่งมีมวล m_A = 1.5 kg ถูกยึดให้ติดกับฐาน B ด้วยสลัก ส่วนฐาน B มีมวล m_B = 4 kg และมีรัศมีไจเรชั่น k = 40 mm และในขณะเริ่มต้นหมุนด้วยความเร็ว 300 รอบต่อนาที โดยแท่งวัตถุจะถูกล็อคให้อยู่ในแนวตั้งฉาก ถ้าปล่อยตัวล็อคและแท่งวัตถุมีตำแหน่งในแนวระดับ จงหาความเร็วรอบของระบบ



หลักการวิเคราะห์ :

เนื่องจากไม่มีโมเมนต์มากระทำ จึงสามารถใช้หลักความถาวรของโมเมนตัมเชิงมุมในการวิเคราะห์โดยใช้สมการ $\Delta H_O = 0$

การคำนวณ : เริ่มต้น $H_A = 2I\omega$

เมื่อแท่งวัตถุอยู่ในแนวตั้งฉากขนานกับแกนหมุน

$$I = mr^2 = (1.5)(0.06)^2$$

ดังนั้น $$H_A = 2(1.5)(0.06)^2 \text{ x } \frac{300 \text{ x } 2\pi}{60} \text{ N.m.s}$$

$$H_B = I\omega = mk^2\omega = (4)(0.04)^2 \text{ x } \frac{300 \text{ x } 2\pi}{60} \text{ N.m.s}$$

สุดท้าย : $$H_A = 2[\bar{I} + md^2]\omega = (2)[\frac{l^2}{12} + d^2](\frac{2\pi N}{60}) \text{ N.m.s}$$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

$$H_A = 2(1.5)[\frac{(0.3)^2}{12} + (0.150+0.060)^2](\frac{2\pi N}{60})$$

$$= 0.1548(\frac{2\pi N}{60}) \text{ N.m.s}$$

$$H_B = I\omega = mk^2\omega = 4(0.04)^2(\frac{2\pi N}{60}) = 0.0064(\frac{2\pi N}{60})$$

แทนค่าลงในสมการ $\Delta H_O = 0$ จะได้

$$[3(0.06)^2 + 4(0.04)^2](300) = [0.1548+0.064]N$$

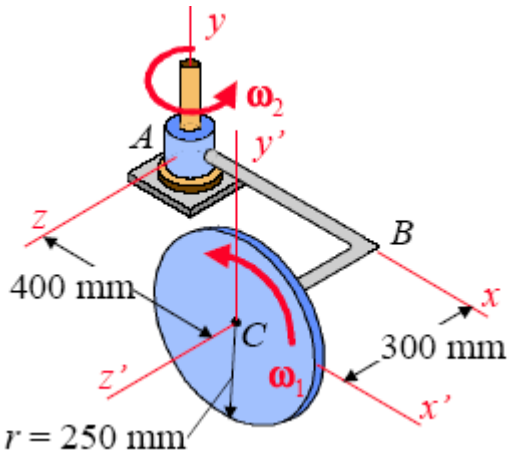
$$0.0172(300) = 0.1612 \quad N$$

$$N = 32 \text{ rev/min}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 17 เลขหน้า 3/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 2. แผ่นจานกลมดังแสดงในภาพ มีมวล m = 5 kg หมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_1 = 8$ rad/s โดยที่แขน AB มีความเร็วเชิงมุม $\omega_2 = 3$ rad/s จงหาขนาดของโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด C



วิธีทำ

พิจารณาจากภาพจะได้ค่าความเร็วเชิงมุมของระบบ

คือ $\omega_1 = 8\vec{k}$, $\omega_2 = 3\vec{j}$

ดังนั้นความเร็วเชิงมุมของระบบ

คือ

$$\Rightarrow \omega = \omega_1 + \omega_2$$

$$\omega = 3\vec{j} + 8\vec{k} \text{ rad/s}$$

และ

$$\Rightarrow \vec{I}_{x'} = \vec{I}_{y'} = \frac{1}{4}mr^2$$

$$\Rightarrow \vec{I}_{z'} = \frac{1}{2}mr^2$$

จากสมการโมเมนตัมเชิงมุม

$$(H_C)_{x'} = (\vec{I}_{x'})\omega_{x'} = 0$$

$$(H_C)_{y'} = (\vec{I}_{y'})\omega_{y'} = \frac{1}{4}(5)(0.25)^2(3) = 0.234 \frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}}$$

$$(H_C)_{z'} = (\vec{I}_{z'})\omega_{z'} = \frac{1}{4}(5)(0.25)^2(8) = 1.25 \frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}}$$

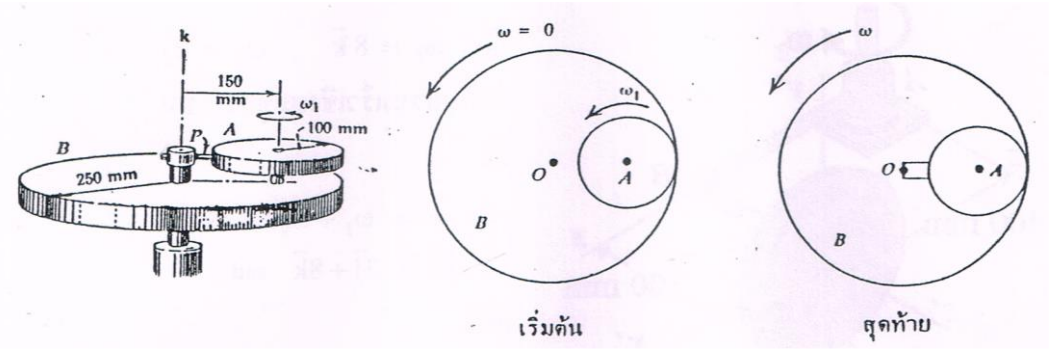
ดังนั้นโมเมนตัมเชิงมุมรอบจุด C มีค่าเท่ากับ

$$H_C = 0.234\vec{j} + 1.25\vec{k} \frac{\text{kg.m}^2}{\text{s}}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 17 เลขหน้า 4/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 3. จานหมุนตัวใหญ่มีมวล 60 kg และมี Radius of Gyration รอบแกนตั้งฉากเท่ากับ 200mm ส่วนจานกลมตันตัวเล็กมีมวล 8 kg และหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม $\omega_1 = 80$ rad/s ในขณะเริ่มต้นเมื่อจานตัวใหญ่อยู่ในสภาวะหยุดนิ่ง และเมื่อหมุด P ซึ่งหมุนไปกับจานตัวใหญ่ถูกปล่อยให้กดขอบจานกลมตัวเล็ก จนกระทั่งจานกลมเล็กหยุดหมุน เมื่อเทียบกับจานตัวใหญ่ จงหาความเร็วเชิงมุมสุดท้ายของระบบดังกล่าว โดยไม่คิดความเสียดทานที่จุดต่าง ๆ



หลักการวิเคราะห์ :

เนื่องจากไม่มีโมเมนต์มากระทำจึงสามารถใช้หลักการความถาวรของโมเมนตัมเชิงมุม ในการวิเคราะห์ $\Delta H_O = 0$ หรือโมเมนตัมเชิงมุมเริ่มต้นของระบบ จะเท่ากับโมเมนตัมเชิงมุมสุดท้ายของระบบ

การคำนวณ :

$$\bar{I}_A = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{1}{2}(8)(0.1)^2 = 0.04 \text{ kg.m}^2$$

$$\bar{I}_B = m k^2 = (60)(0.2)^2 = 2.4 \text{ kg.m}^2$$

เริ่มต้น :

$$H_O = \bar{H}_A = \bar{I}_A \omega_1 = 0.04 \text{x} 80 = 3.2 \text{ kg.m/s}^2$$

สุดท้าย :

$$H_O = (\bar{I}_{AO} + \bar{I}_B)(\omega)$$

โดย $\bar{I}_{AO} = \bar{I}_A + md^2 = 0.04 + (8)(0.15)^2$

ดังนั้น $H_O = [0.04 + (8)(0.15)^2 + 2.4]\omega = 2.62\omega$ N.m.s

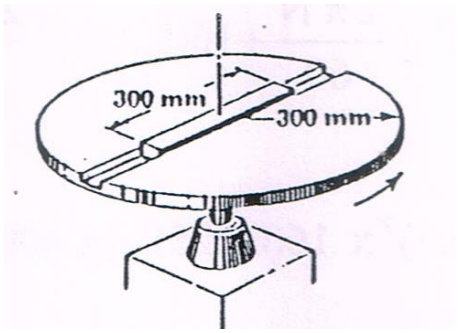
จากสมการ $\Delta H_O = 0$

จะได้ $3.2 = 2.62\omega \Rightarrow \omega = 1.22$ rad/s **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน ครั้งที่ 17 เลขหน้า 5/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 4. แท่งวัตถุเรียวยาว 300 mm มีมวล 1.6 kg และเมื่อเริ่มต้นอยู่กึ่งกลางของร่องบนจานกลมซึ่งหมุนได้โดยอิสระรอบแกนตั้งฉากด้วยความเร็ว 400 rev/min โดยจานกลมมีมวล 16 kg และมี Radius of Gyration เท่ากับ 225 mm ถ้าแท่งวัตถุถูกผลักเล็กน้อย ก็จะเลื่อนออกจากตำแหน่งกึ่งกลางดังกล่าว จงหาความเร็วของจานเมื่อปลายแท่งวัตถุถึงขอบจาน



หลักการวิเคราะห์ :

เนื่องจากไม่มีโมเมนต์มากระทำ จึงสามารถใช้หลักความถาวรของโมเมนตัมเชิงมุมในการวิเคราะห์โดยใช้สมการ $\Delta H_O = 0$ ในการหาค่าความเร็วรอบตามต้องการ

การคำนวณ :

เริ่มต้น

$$H_O = \bar{I}\omega = \frac{1}{12} m l^2 \omega$$

$$H_O = \frac{1}{12}(1.6)(0.3)^2 \text{ x } \frac{400 \text{ x } 2\pi}{60} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

สำหรับจานกลม

$$H_O = I_O \omega = m r^2 \omega = 16(0.225)^2 \frac{400 \text{ x } 2\pi}{60} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

สุดท้าย

สำหรับแท่งวัตถุ

$$H_O = I_O \omega = \frac{1}{3} m l^2 \omega$$

$$H_O = \frac{1}{3}(1.6)(0.3)^2 \text{ x } \frac{2\pi N}{60} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

สำหรับจานกลม

$$H_O = I_O \omega = m r^2 \omega = 16(0.225)^2 \frac{2\pi N}{60} \text{ kg.m}^2/\text{s}$$

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 6/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

แทนค่าลงในสมการ $\Delta H_O = 0$

$(H_O)_{start} = (H_O)_{Final}$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}(1.6)(0.3)^2 \text{ x } \frac{400 \text{ x } 2\pi}{60} + 16(0.225)^2(\frac{2\pi \text{ x } 400}{60})$$

$$= \frac{1}{3}(1.6)(0.3)^2 + \frac{2\pi N}{60} + 16(0.225)^2 \frac{2\pi N}{60}$$

$$\Rightarrow [\frac{1}{12}(1.6)(0.3)^2 \text{ x } 16(0.225)^2] \text{ x } 400 = [\frac{1}{3}(1.6)(0.3)^2 + 16(0.225)^2] N$$

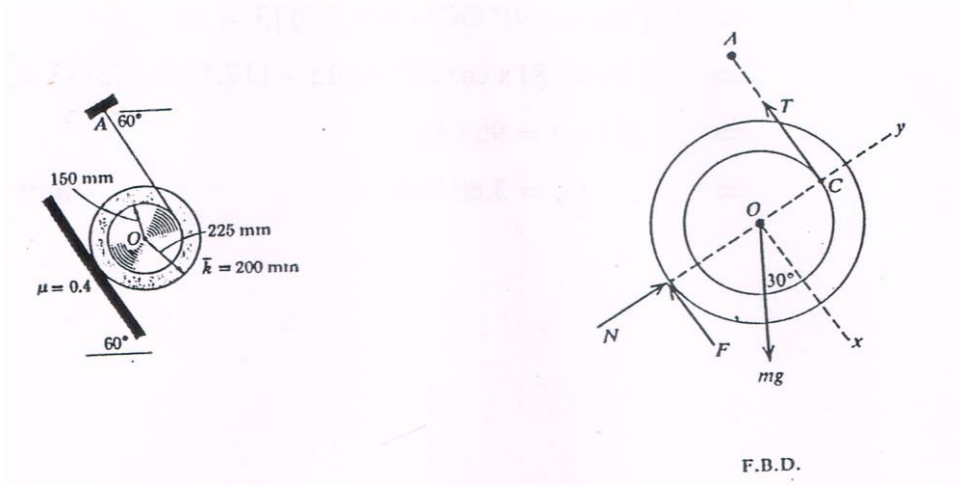
$$\Rightarrow (0.012 + 0.81) \times 400 = (0.048 + 0.81) \ N$$

$$N = 383 \text{ rev/min}$$ **ตอบ**

ใบเตรียมการสอน	ครั้งที่ 17 เลขหน้า 7/8

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

ข้อที่ 5 : ล้อรัศมี 225 mm ติดกับแกนกลางรัศมี 150 mm มีมวล 60 kg ถูกปล่อยจากจุดหยุดนิ่งบนพื้นเอียง 60^o จงคำนวณหาความเร็ว ของจุดศูนย์กลาง O เมื่อเวลา 3s หลังจากปล่อยจากตำแหน่งหยุดนิ่ง



หลักการวิเคราะห์ :

หาแรงเสียดทานโดยตรวจสอบ ว่าจะมีการลื่นไถลหรือไม่ ถ้ามีการลื่นไถล $F = \mu N$ แล้วใช้ความสัมพันธ์ระหว่างโมเมนต์กับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมเชิงมุม เพื่อหาความเร็วของจุดศูนย์กลางมวลตามต้องการ

การคำนวณ :

จากสมการ $\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\sin 30^o = 60(9.81)(0.5) = 294.3$ N

ในสภาวะสมดุล $\sum M_c = 0$ (ทิศทางตามเข็มนาฬิกา)

$\Rightarrow F(0.375) - mg\cos 30^o (0.15) = 0$

$\Rightarrow F = 203.9$ N

$\Rightarrow F = 203.9$ N

$= 0.4 \text{x } 294.3 = 117.72$ N

เมื่อ $F > F_{max}$ ล้อจะลื่นไถลโดยความฝืด F เท่ากับ 117.72 N

$$H_A = H_c = I_O \omega + m v_O \overline{OC} = m k^2 (\frac{v_O}{\overline{OC}}) + m v_O \overline{OC}$$

$$H_A = H_C = 60(0.2)^2 (\frac{v_O}{0.15}) + 60(v_O)(0.15)$$

$$H_A = H_C = 16(v_O) + 9(v_O) = 25(v_O)$$

เฉลยแบบฝึกหัดท้ายบทเรียน

$$\Rightarrow \quad \int_0^3 \sum M_c \, dt = H_c - 0$$

$$\Rightarrow \quad [mg\cos 30^o \, \overline{OC} - F(0.375)]3 = 25 v_O$$

$$\Rightarrow \quad [60 \text{ x } 9.81 \text{x } \cos 30^o \text{ x } 0.15 - 117.72(0.375)]3 = 25 v_O$$

$$\Rightarrow \quad 25(v_O) = 96.945$$

$$\Rightarrow \quad v_O = 3.88 \text{ m/s}$$ **ตอบ**

ภาคผนวก ข

ตารางแสดงค่าต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้อง

ตารางที่ 1 ตารางแสดงค่าอุปสรรค

ปริมาณ	ตัวคูณ	ค่าอุปสรรค	สัญลักษณ์
1,000,000,000	10^{9}	Giga	G
1,000,000	10^{6}	Mega	M
1,000	10^{3}	Kilo	k
100	10^{2}	Hecto	h
10	10	Deka	da
0.1	10^{-1}	Deci	d
0.01	10^{-2}	Centi	c
0.001	10^{-3}	Milli	m
0.000001	10^{-6}	Micro	μ
0.000000001	10^{-9}	Nano	n
0.000000000001	10^{-12}	Pico	p
0.000000000000001	10^{-15}	Femto	f

ตารางที่ 2 ข้อมูลในระบบสุริยจักรวาล (Solar System) ในระบบหน่วยอังกฤษ (In the U.S. Customary System of Unit)

	มวล (Mass)	รัศมี (Average Radius)	ระยะทางที่วัดจากพื้นผิวโลก
โลก	4.4095×10^{23} slug	2.029×10^{7} ft	-
ดวงจันทร์	5.037×10^{21} slug	5.702×10^{6} ft	1.261×10^{9} ft
ดวงอาทิตย์	1.364×10^{29} slug	2.284×10^{9} ft	4.908×10^{11} ft

ตารางที่ 3 ข้อมูลในระบบสุริยจักรวาล (Solar System) ในระบบหน่วย SI (In the SI System of Unit)

	มวล (Mass)	รัศมี (Average Radius)	ระยะทางที่วัดจากพื้นผิวโลก
โลก	5.976×10^{24} kg	6.371×10^{6} m	-
ดวงจันทร์	7.350×10^{21} kg	1.738×10^{6} m	3.844×10^{8} m
ดวงอาทิตย์	1.990×10^{30} kg	6.960×10^{8} m	1.496×10^{11} m

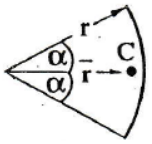
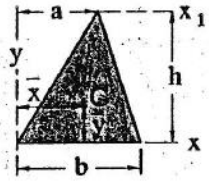
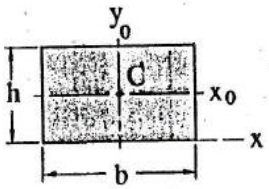
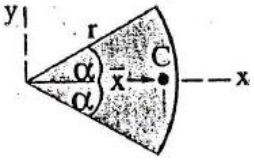
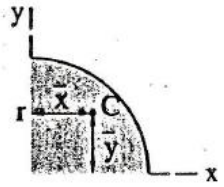
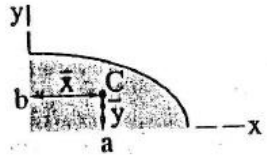
ตารางที่ 3 ตารางการแปลงหน่วยระหว่างระบบ SI (SI Unit System) กับระบบอังกฤษ(U.S. Customary System of Unit)

ปริมาณ	แปลงจากระบบอังกฤษ เป็น ระบบ SI	แปลงจากระบบ SI เป็นระบบอังกฤษ
ความยาว	$1\,in = 25.40\ \ mm$	$1\,m = 39.37\ \ in$
	$1\,ft = 0.3048\ m$	$1\,m = 3.281\ ft$
	$1\,mi = 1.609\ \ km$	$1\,km = 0.6214\ mi$
พื้นที่	$1\,in^2 = 645.2\ mm^2$	$1\,m^2 = 1{,}550\ \ in^2$
	$1\,ft^2 = 0.0929\ m^2$	$1\,m^2 = 10.76\ ft^2$
ปริมาตร	$1\,in^3 = 16.39(10)^3\ \ mm^3$	$1\,mm^3 = 61.02(10)^6\ \ in^3$
	$1\,ft^3 = 0.02832\ m^3$	$1\,m^3 = 35.31\ \ ft^3$
	$1\,gal = 3.785\ \ L$	$1\ L = 0.2642\,gal$
มวล	$1\,slug = 14.59\ \ kg$	$1\,kg = 0.06854\,slug$
แรง	$1\,lb = 4.448\ \ N$	$1\,N = 0.2248\ \ lb$
แรงกระจาย	$1\,lb/ft = 14.59\ N/m$	$1\,kN/m = 68.58\,lb/ft$
ความดัน	1 psi $= 6.895$ kPa	1 kPa $= 0.1450$ psi
	1 ksi $= 6.895$ MPa	1 MPa $= 145.0$ psi
ความเร็ว	1 in/s $= 0.0254$ m/s	1 m/s $= 39.37$ in/s
	1 ft/s $= 0.3048$ m/s	1 m/s $= 3.281$ ft/s
	1 mi/h $= 1.609$ km/h	1 km/h $= 0.6214$ mi/h
ความเร่ง	$1\ in/s^2 = 0.0254\ m/s^2$	$1\ m/s^2 = 39.37\ in/s^2$
	$1\ ft/s^2 = 0.3048\ m/s^2$	$1\ m/s^2 = 3.281\ ft/s^2$

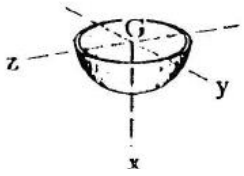
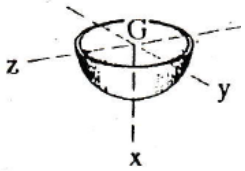
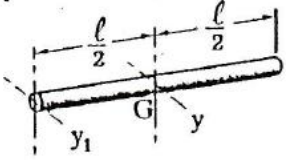
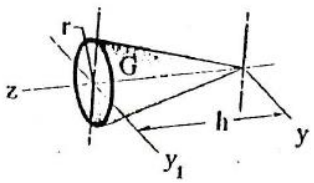
ภาคผนวก ค

คุณสมบัติของวัสดุที่มีรูปทรงต่างๆ

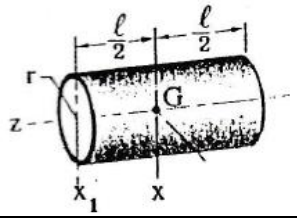
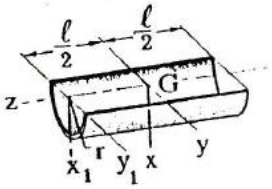
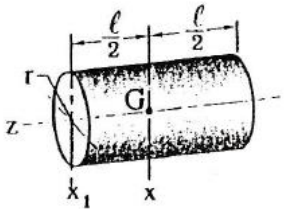
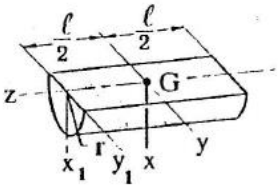
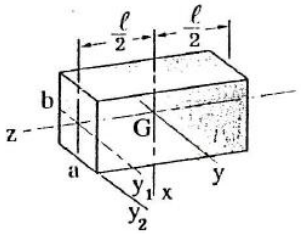
ตารางที่ ค.1 ตารางแสดงคุณสมบัติของรูปทรงเรขาคณิตในระนาบ

ลักษณะของรูปทรง	จุดศูนย์กลาง	โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่
ส่วนหนึ่งของเส้นรอบวง 	$\bar{r} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$	
แผ่นสามเหลี่ยม 	$\bar{x} = \frac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \frac{h}{3}$	$I_x = \frac{b h^3}{12}$ $\bar{I}_x = \frac{b h^3}{36}$ $I_{x1} = \frac{b h^3}{4}$
แผ่นสี่เหลี่ยมผืนผ้า 		$I_x = \frac{b h^3}{3}$ $\bar{I}_x = \frac{b h^3}{12}$ $J = \frac{b h}{12}(b^2 + h^2)$
ส่วนหนึ่งของแผ่นวงกลม 	$\bar{x} = \frac{2}{3}(\frac{r \sin \alpha}{\alpha})$	$I_x = \frac{r^4}{4}(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$ $I_y = \frac{r^4}{4}(\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha)$ $J = \frac{1}{2}(r^4 \alpha)$
เสี้ยวหนึ่งของแผ่นวงกลม 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_x = I_y = \frac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = (\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}) r^4$ $J = \frac{\pi r^4}{8}$
เสี้ยวหนึ่งของวงรี 	$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$	$I_x = \frac{\pi a b^3}{16}, \bar{I}_x = (\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}) ab^3$ $I_y = \frac{\pi a^3 b}{16}, \bar{I}_y = (\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}) ab$ $J = \frac{\pi r^4}{8}$

ตารางที่ ค.2 ตารางแสดงคุณสมบัติของรูปทรงเรขาคณิตในระนาบ

ลักษณะของรูปทรง	จุดศูนย์กลาง	โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่
ทรงกลมกลวง	-	$I_{zz} = \frac{2}{3} m r^2$
ครึ่งทรงกลมกลวง 	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3} m r^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12} m r^2$
ทรงกลมตัน	-	$I_{zz} = \frac{2}{5} m r^2$
ครึ่งทรงกลมตัน 	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5} m r^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320} m r^2$
แท่งเรียว 		$I_{yy} = \frac{1}{12} m l^2$ $\bar{I}_{y_1y_1} = \frac{1}{3} m l^2$
แท่งกรวยกลม 	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{2} m h^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{6} m h^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{18} m h^2$

ตารางที่ ค.2 ตารางแสดงคุณสมบัติของรูปทรงเรขาคณิตในระนาบ

ลักษณะของรูปทรง	จุดศูนย์กลาง	โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่
ทรงกระบอกกลวง 	-	$I_{xx} = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $I_{zz} = m r^2$
ครึ่งทรงกระบอกกลวง 	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{2} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $I_{zz} = m r^2$ $\bar{I}_{zz} = (1 - \frac{4}{\pi^2}) m r^2$
ทรงกระบอกตัน 		$I_{xx} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$
ครึ่งทรงกระบอกตัน 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$ $\bar{I}_{zz} = (\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}) m r^2$
ปริซึมฐานสี่เหลี่ยมมุมฉาก 		$I_{xx} = \frac{1}{12} m (a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12} m (b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{3} m l^2$